

2014

DEEC – Área Científica de Telecomunicações
Instituto Superior Técnico

Propagação e Antenas
Prof. Carlos R. Paiva

EQUAÇÕES DE MAXWELL

UMA INTRODUÇÃO ÀS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Equações de Maxwell

A *electrodinâmica clássica* baseia-se nas *equações de Maxwell*. Actualmente, porém, esta teoria constitui, apenas, o limite não-quântico de uma *teoria quântica do campo* que descreve – no caso geral – a interacção electromagnética, a saber: a *electrodinâmica quântica* ou QED (do inglês: *quantum electrodynamics*). Porém, no domínio macroscópico, a *electrodinâmica clássica* continua a ser a descrição física aceite, em perfeita concordância com a teoria da relatividade. Aliás, a teoria da relatividade (restrita) de Einstein surgiu para resolver o conflito (insanável) entre as equações de Maxwell e a mecânica newtoniana, tendo obrigado esta última a uma profunda revisão.

Começemos, então, por apresentar a descrição do campo electromagnético em termos das equações de Maxwell.

As principais grandezas intervenientes são (os campos vectoriais são representados a negrito enquanto que os campos escalares são representados em fonte normal):

\mathbf{E} [V · m ⁻¹]	↦	intensidade do campo eléctrico
\mathbf{B} [Wb · m ⁻² = T]	↦	intensidade do campo magnético
\mathbf{D} [C · m ⁻²]	↦	excitação eléctrica
\mathbf{H} [A · m ⁻¹]	↦	excitação magnética
ρ [C · m ⁻³]	↦	densidade de carga (eléctrica)
\mathbf{J} [A · m ⁻²]	↦	densidade de corrente (eléctrica)

No vácuo verificam-se as seguintes *relações constitutivas*

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

ε_0 [F · m ⁻¹]	↦	permissividade eléctrica do vácuo
μ_0 [H · m ⁻¹]	↦	permeabilidade magnética do vácuo

Em unidades SI (Sistema Internacional), a velocidade da luz no vácuo é definida (de forma exacta) como sendo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \mapsto \quad \text{velocidade da luz no vácuo.}$$

NOTA IMPORTANTE – Esta última equação mostra a enorme fecundidade e capacidade de unificação da teoria de Maxwell. Ela vem revelar que a luz não é mais do que um fenómeno electromagnético. A electrodinâmica clássica, assim, além de unificar a electricidade com o magnetismo numa única teoria coerente, vem ainda reduzir a óptica a um simples capítulo da teoria electromagnética.

Este valor exacto de c decorre da definição (estabelecida em 1983) da unidade de comprimento **metro**: a distância percorrida pela luz, no vácuo, num intervalo de tempo de duração $1 / 299\,792\,458$ de um segundo. Por sua vez, um **segundo** é, por definição, a duração de $9\,192\,631\,770$ períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental de um átomo de césio-133.

Define-se, também, o seguinte valor exacto para a permeabilidade magnética do vácuo:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Assim, o valor numérico da permitividade eléctrica do vácuo será

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

A impedância do vácuo corresponde, então, a

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 119.9169832 \pi \Omega$$

que, frequentemente, é aproximado pelos valores

$$\eta_0 \approx 120 \pi \Omega \approx 377 \Omega.$$

É também usual considerar as seguintes aproximações:

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Na tabela anexa apresentam-se as sete unidades básicas do sistema SI (ver apêndice).

Tabela 1. As Sete Unidades Básicas (SI)

Grandeza	Unidade	Símbolo da unidade	Símbolo da dimensão
Comprimento	metro	m	L
Massa	quilograma	kg	M
Tempo	segundo	s	T
Corrente eléctrica	ampere	A	I
Temperatura termodinâmica	kelvin	K	Θ
Quantidade de matéria	mole	mol	N
Intensidade luminosa	candela	cd	J

As quatro equações (vectoriais) de Maxwell escrevem-se, então, na forma que a seguir se apresenta.

EQUAÇÕES DE MAXWELL

Grupo de Faraday	→	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	↪ equação de Maxwell-Faraday
		$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	↪ lei de Gauss magnética

Grupo de Maxwell	→	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	↪ equação de Maxwell-Ampère
		$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	↪ lei de Gauss eléctrica

O grupo de Faraday está intimamente relacionado com a conservação do fluxo magnético. O grupo de Maxwell, por sua vez, está intimamente relacionado com a conservação da carga (elétrica). No grupo de Faraday aparecem os vectores que caracterizam a intensidade do campo electromagnético (*how strong?*): (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . No grupo de Maxwell aparecem as fontes do campo electromagnético (ρ, \mathbf{J}) e as grandezas extensivas (*how much?*): (\mathbf{D}, \mathbf{H}) . Em teoria da relatividade restrita (espaço-tempo de Minkowski) o par de grandezas intensivas (\mathbf{E}, \mathbf{B}) dá origem ao tensor de Faraday e o par de grandezas extensivas (\mathbf{D}, \mathbf{H}) dá origem ao tensor de Maxwell.

Em regime estacionário, em que todas as derivadas em ordem ao tempo se anulam, a realidade do campo electromagnético – como entidade única que associa entre si, no caso geral, a realidade eléctrica com a realidade magnética – dá então origem à separação entre essas duas realidades.

$$\boxed{\text{Regime estacionário}} \rightarrow \boxed{\text{Grupo de Faraday}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Regime estacionário}} \rightarrow \boxed{\text{Grupo de Maxwell}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases}$$

Perde-se, assim, a ligação (i.e., o acoplamento) entre \mathbf{E} e \mathbf{B} no grupo de Faraday – o mesmo acontecendo, no grupo de Maxwell, entre \mathbf{D} e \mathbf{H} .

No vácuo desaparece a necessidade de introduzir as grandezas extensivas (\mathbf{D}, \mathbf{H}) que são, portanto, apenas necessárias quando o campo electromagnético interage com os meios materiais. Com efeito, atendendo (como se viu anteriormente) a que

$$\boxed{\text{Vácuo}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \end{cases}$$

vem, mais simplesmente,

$$\boxed{\text{Grupo de Faraday}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mapsto \text{equação de Maxwell-Faraday} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \mapsto \text{lei de Gauss magnética} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Vácuo}} \rightarrow \boxed{\text{Grupo de Maxwell}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \mapsto \text{equação de Maxwell-Ampère} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \mapsto \text{lei de Gauss eléctrica} \end{cases}$$

Note-se que, no vácuo, apenas o grupo de Maxwell regista uma alteração. O resultado é que, no vácuo, as grandezas extensivas (\mathbf{D} , \mathbf{H}) são, efectivamente, supérfluas. Então, na ausência de fontes do campo, as equações de Maxwell no vácuo reduzem-se a

$$\boxed{\text{Grupo de Faraday}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mapsto \text{equação de Maxwell-Faraday} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \mapsto \text{lei de Gauss magnética} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Vácuo \& sem fontes}} \rightarrow \boxed{\text{Grupo de Maxwell}} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \mapsto \text{equação de Maxwell-Ampère} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \mapsto \text{lei de Gauss eléctrica} \end{cases}$$

mostrando, assim, que – neste caso – quer o campo eléctrico \mathbf{E} quer o campo magnético \mathbf{B} são solenoidais (as respectivas divergências anulam-se) e, portanto, as linhas de força quer de \mathbf{E} quer de \mathbf{B} são fechadas.

Destas equações de Maxwell, no vácuo e sem fontes do campo, vem sucessivamente:

$$\left| \begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

$$\left| \begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{c^2} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}}$$

Mas, da análise vectorial, sabe-se que, sendo \mathbf{F} um campo vectorial qualquer, então

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}.$$

Assim, obtém-se ainda

$$\begin{cases} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Mas, por outro lado, tem-se

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

de modo que se obtêm as duas *equações das ondas* ou *equações de d'Alembert*:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0}.$$

NOTAÇÃO – Por vezes, na literatura, usa-se para o *laplaciano* o símbolo Δ em vez do símbolo $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Nesse caso a equação das ondas será escrita na forma alternativa

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0.$$

Vamos, agora, analisar a solução da equação das ondas no caso particular em que (polarização linear segundo X)

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \phi(z, t) \mathbf{e}_1.$$

Como sempre designa-se por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base ortonormada do referencial (X, Y, X) . Nestas condições, a equação das ondas reduz-se à *equação unidimensional (segundo z) de d'Alembert*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

Demonstra-se, de seguida, que a solução desta equação diferencial linear assume a forma genérica

$$\phi(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

onde f e g são funções arbitrárias dos argumentos $u = z - ct$ e $v = z + ct$, respectivamente.

Demonstração

A função $\phi = \phi(z, t)$ pode, alternativamente, ser representada na forma $\phi = \phi(u, v)$. Assim, atendendo às definições de u e v , obtém-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial u} + c \frac{\partial \phi}{\partial v},$$

pelo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) = -c \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial t} - c \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} + c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Portanto, infere-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) - \frac{1}{c^2} \left(c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} + c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} = 0. \end{aligned}$$

Porém, tem-se

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}$$

de modo que a equação diferencial se reduz à forma

$$4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0}.$$

Esta última equação tem uma solução óbvia:

$$\phi(u, v) = f(u) + g(v) \Rightarrow \boxed{\phi(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)}.$$

Com efeito,

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} [\phi(u, v)] = \frac{\partial}{\partial v} [f(u) + g(v)] = \frac{dg}{dv} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial \phi}{\partial v} \right] = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{dg}{dv} \right] = 0$$

como se pretendia demonstrar.

Vai-se, agora, provar que $f(z - ct)$ representa uma onda que se propaga (sem deformação) no sentido positivo do eixo Z com a velocidade da luz (no vácuo) c . Analogamente, $g(z + ct)$ representa uma onda que se propaga (sem deformação) no sentido negativo do eixo Z (também) com a velocidade c . Vejamos.

Sejam

$$\boxed{u = z - ct, \quad v = z + ct}$$

os argumentos, respectivamente, das funções $f = f(u)$ e $g = g(v)$. No caso de $f = f(u)$, a evolução espaço-temporal é determinada pelo argumento u . Este argumento assume o valor constante $u = u_0$ quando

$$u_0 = z - ct \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(u_0) = \frac{\partial}{\partial t}(z - ct) \Rightarrow 0 = \frac{\partial z}{\partial t} - c,$$

ou seja, quando

$$V = \frac{\partial z}{\partial t} = c.$$

Infere-se, daqui, que esta função $f = f(u)$ representa uma *onda progressiva* que se propaga no *sentido positivo* do eixo Z ao longo do tempo t .

No caso de $g = g(v)$, a evolução espaço-temporal é determinada pelo argumento v . Este argumento assume o valor constante $v = v_0$ quando

$$v_0 = z + ct \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(v_0) = \frac{\partial}{\partial t}(z + ct) \Rightarrow 0 = \frac{\partial z}{\partial t} + c,$$

ou seja, quando

$$U = \frac{\partial z}{\partial t} = -V = -c.$$

Assim, a função $g = g(v)$ representa uma *onda progressiva* que se propaga no *sentido negativo* do eixo Z .

$$\boxed{f(u) = f(z - ct)} \mapsto \boxed{Z \rightarrow} \quad \boxed{g(v) = g(z + ct)} \mapsto \boxed{Z \leftarrow}$$

$$f(z - ct) \mapsto \text{[Diagram of a wave pulse moving to the right on a z-axis]}$$

$$g(z + ct) \mapsto \text{[Diagram of a wave pulse moving to the left on a z-axis]}$$

O resultado anterior – sobre a propagação de ondas electromagnéticas no vácuo – pode, então, sintetizar-se na seguinte proposição. A solução ondulatória corresponde à combinação de duas ondas progressivas: uma cuja forma é caracterizada pela função f e que se move para a direita com velocidade c ; e a outra cuja forma é caracterizada pela função g e que se move para a esquerda (também) com velocidade c .

Note-se que a equação diferencial de propagação (unidimensional) das ondas,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

pode ser factorizada na forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(z, t) = 0.$$

Assim, se apenas se considerar a parte

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(z, t) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}},$$

a solução geral reduz-se à forma de uma única onda progressiva, tal que

$$\boxed{\phi(z, t) = f(z - ct)}.$$

Demonstração

De facto, vem sucessivamente

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{d\phi}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d\phi}{du}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{d\phi}{du}$$

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{d\phi}{du} = -\frac{1}{c} \left(-c \frac{d\phi}{du} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

tal como se pretendia demonstrar.

Um exemplo importante da solução do tipo

$$\phi(z, t) = f(z - ct)$$

é uma *onda monocromática* da forma

$$\phi(z, t) = \phi_0 \cos [k_0 (z - ct)] ,$$

tendo-se introduzido a *constante de propagação* (ou *número de onda*)

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \omega = ck_0$$

e onde ω representa a *frequência angular* tal que

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} ,$$

sendo f a *frequência* que é equivalente ao inverso do *período* (temporal) T . Define-se, ainda, o *comprimento de onda* λ como sendo

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0} .$$

Note-se que, com estas definições, é possível escrever

$$\phi(z, t) = \phi_0 \cos(k_0 z - \omega t) = \phi_0 \cos [k_0 (z - ct)] = \phi_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] .$$

Começemos por analisar o comportamento desta onda num ponto fixo $z = z_0$ do espaço. Vem

$$\phi(z_0, t) = \phi_0 \cos(k_0 z_0 - \omega t) .$$

Assim, com efeito, o período temporal $T = 1/f$ é tal que

$$\phi(z_0, t + T) = \phi(z_0, t) ,$$

de modo que

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Veamos, agora, o comportamento desta onda num determinado instante $t = t_0$ do tempo. Vem

$$\phi(z, t_0) = \phi_0 \cos(k_0 z - \omega t_0).$$

Neste caso, o comprimento de onda (ou período espacial) λ é tal que

$$\phi(z + \lambda, t_0) = \phi(z, t_0),$$

donde se tira que

$$k_0 \lambda = 2\pi \Rightarrow k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

A velocidade que um observador (hipotético) deverá ter para observar sempre a mesma amplitude da onda – i.e., a *velocidade de fase* v_p da onda – deverá ser então (onde θ_0 é uma constante)

$$k_0 z - \omega t = \theta_0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(k_0 z - \omega t) = \frac{\partial \theta_0}{\partial t} \Rightarrow k_0 \frac{\partial z}{\partial t} - \omega = 0$$

$$\therefore v_p = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k_0} = c.$$

Assim, infere-se que

$$v_p = c = \frac{\omega}{k_0} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \boxed{c = \lambda f}.$$

Esta última equação permite, portanto, relacionar a frequência f com o comprimento de onda.

Veamos alguns exemplos práticos (utiliza-se, sempre, a aproximação $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Por exemplo: para a frequência $f = 50 \text{ Hz}$ obtém-se um comprimento de onda $\lambda = 6\,000 \text{ km}$. Este comprimento de onda deve ser comparado com o raio a da Terra – cerca de $6\,370 \text{ km}$. Com efeito, uma definição (muito) antiga da unidade **metro** estabelecia que: o **metro** era a décima milionésima parte de um quarto de meridiano terrestre, i.e.,

$$1 \text{ m} = 10^{-7} \times \left[\frac{1}{4} \times (2\pi a) \right] \Rightarrow a = \frac{2}{\pi} \times 10^4 \text{ km} \approx 6370 \text{ km} .$$

Já uma frequência típica de microondas, como $f = 9 \text{ GHz}$, corresponde a um comprimento de onda $\lambda \approx 3.33 \text{ cm}$.

Um comprimento de onda típico de um sistema de comunicação óptica é $\lambda = 1550 \text{ nm}$ a que corresponde uma frequência $f \approx 193.5484 \text{ THz}$.

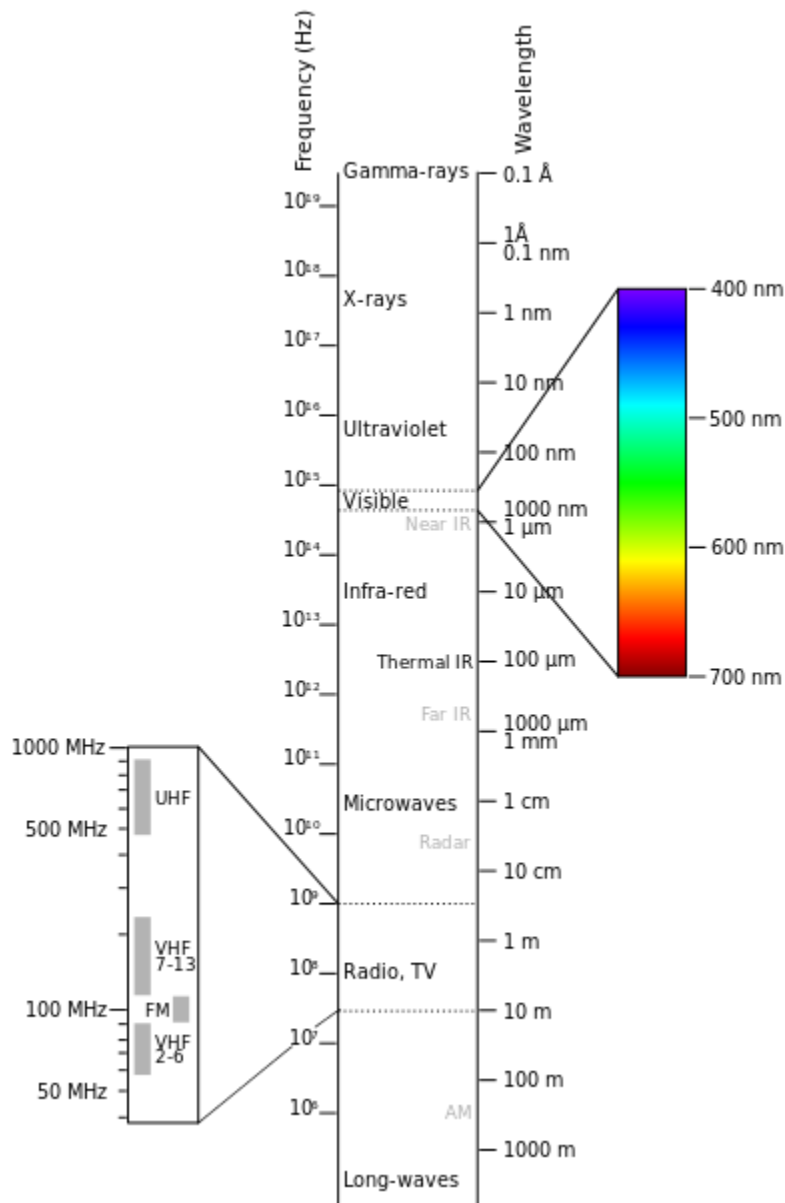


Tabela 2. Bandas de radiofrequência (RF)

Frequência: f	Comprimento de onda: λ	Banda de RF
3 Hz – 30 Hz	100 000 km – 10 000 km	ELF = extremely low frequency
30 Hz – 300 Hz	10 000 km – 1 000 km	SLF = superlow frequency
300 Hz – 3 kHz	1 000 km – 100 km	ULF = ultralow frequency
3 kHz – 30 kHz	100 km – 10 km	VLF = very low frequency
30 kHz – 300 kHz	10 km – 1 km	LF = low frequency
300 kHz – 3 MHz	1 km – 100 m	MF = medium frequency
3 MHz – 30 MHz	100 m – 10 m	HF = high frequency
30 MHz – 300 MHz	10 m – 1 m	VHF = very high frequency
300 MHz – 3 GHz	1 m – 10 cm	UHF = ultrahigh frequency
3 GHz – 30 GHz	10 cm – 1 cm	SHF = superhigh frequency
30 GHz – 300 GHz	1 cm – 1 mm	EHF = extremely high frequency

Tabela 3. Espectro do visível

Cor	Frequência: f	Comprimento de onda: λ
Violeta	668 THz – 789 THz	380 nm – 450 nm
Azul	606 THz – 668 THz	450 nm – 495 nm
Verde	526 THz – 606 THz	495 nm – 570 nm
Amarelo	508 THz – 526 THz	570 nm – 590 nm
Laranja	484 THz – 508 THz	590 nm – 620 nm
Vermelho	400 THz – 484 THz	620 nm – 750 nm

Tabela 4. Bandas dos sistemas de comunicação óptica

Banda	Designação	Comprimento de onda
Original	O	1260 nm – 1360 nm
Extended	E	1360 nm – 1460 nm
Short	S	1460 nm – 1530 nm
Conventional	C	1530 nm – 1565 nm
Long	L	1565 nm – 1625 nm
Ultralong	U	1625 nm – 1675 nm

Tabela 5. Espectro óptico

Banda	Designação	Comprimento de onda
EUV	Extreme-ultraviolet	10 nm – 120 nm
FUV	Far-ultraviolet	120 nm – 200 nm
MUV	Mid-ultraviolet	200 nm – 300 nm
NUV	Near-ultraviolet	300 nm – 400 nm
VS	Visible spectrum	400 nm – 750 nm
NIR	Near-infrared	0.75 μm – 1.4 μm
SWIR	Short-wavelength infrared	1.4 μm – 3 μm
MWIR	Mid-wavelength infrared	3 μm – 8 μm
LWIR	Long-wavelength infrared	8 μm – 15 μm
FIR	Far-infrared	15 μm – 1 mm

NOTA – As frequências mais altas do espectro electromagnético correspondem aos raios X e raios gama. No caso dos *raios X* as frequências vão de 30 PHz até 30 EHz (ou, em termos de comprimentos de onda, entre 0.01 nm e 10 nm). No caso dos *raios gama* (γ -rays) as frequências são superiores a 30 EHz (ou comprimentos de onda inferiores a 10 pm).

Uma forma alternativa de resolver a equação das ondas

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

consiste em recorrer ao método de separação de variáveis. Admitamos, então, que se tem (polarização linear segundo o eixo X)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r})T(t)\mathbf{e}_1.$$

Nestas condições, vem

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{e}_1 T(t) \nabla^2 A, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{e}_1 A(\mathbf{r}) \frac{d^2 T}{dt^2}$$

pelo que

$$T(t) \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} A(\mathbf{r}) \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\nabla^2 A}{A(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2}}.$$

Porém, na última equação, o primeiro membro só depende da posição $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ e o segundo membro só depende do tempo t . Assim, ambos os membros só poderão ser iguais a uma constante. Seja (por conveniência de notação) $-k_0^2$ essa constante. Então

$$\frac{\nabla^2 A}{A(\mathbf{r})} = -k_0^2 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 A + k_0^2 A = 0}$$

e, por outro lado, também

$$\frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k_0^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0}$$

onde se introduziu, nesta última equação, a frequência angular

$$\boxed{\omega = ck_0}.$$

Uma solução possível para a equação diferencial que governa $T(t)$ é

$$T(t) = T_0 \cos(\omega t)$$

como se pode verificar por substituição directa:

$$\frac{dT}{dt} = -\omega T_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2 T_0 \cos(\omega t) \Rightarrow -\omega^2 T + \omega^2 T = 0$$

como se pretendia verificar. Vejamos, agora, a solução da equação que governa $A(\mathbf{r})$:

$$\boxed{\nabla^2 A + k_0^2 A = 0}.$$

Esta equação é conhecida por *equação de Helmholtz*. Neste caso vamos admitir que apenas se observa uma variação espacial com z . Assim

$$A = A(z) \Rightarrow \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k_0^2 A = 0}.$$

Também neste caso uma solução possível é

$$A(z) = A_0 \cos(k_0 z)$$

como se poderia verificar, analogamente, por substituição directa.

Em conclusão, vem (fazendo $E_0 = 2 A_0 T_0$):

$$\boxed{\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_1 [2 E_0 \cos(k_0 z) \cos(\omega t)]}.$$

Aparentemente esta *solução estacionária* não tem a forma geral, vista anteriormente, i.e.,

$$\mathbf{E}(z, t) = \phi(z, t) \mathbf{e}_1, \quad \phi(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct).$$

No entanto, atendendo a que

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

infere-se, finalmente, que esta *onda estacionária* é a sobreposição de duas *ondas progressivas*:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_1 E_0 [\cos(k_0 z + \omega t) + \cos(k_0 z - \omega t)] .$$

Efectivamente, tem-se: (i) uma onda progressiva da forma $f(u) = f(z - ct)$; (ii) uma onda progressiva da forma $g(v) = g(z + ct)$. Ou seja:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_1 [f(u) + g(v)] \quad \mapsto \quad \begin{cases} f(u) = E_0 \cos(k_0 z - \omega t), \\ g(v) = E_0 \cos(k_0 z + \omega t). \end{cases}$$

Considerações análogas poderiam ser feitas para o campo magnético.

Uma onda progressiva

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \theta) \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R},$$

pode sempre ser escrita na forma alternativa

$$f(z, t) = \Re \{ A_0 \exp[i(kz - \omega t)] \} \in \mathbb{R}, \quad A_0 \in \mathbb{C} .$$

A diferença é a seguinte: a amplitude A é *real e positiva* mas a amplitude A_0 é *complexa*. Com efeito, de forma a assegurar que as duas representações se referem à *mesma* onda, é necessário ter

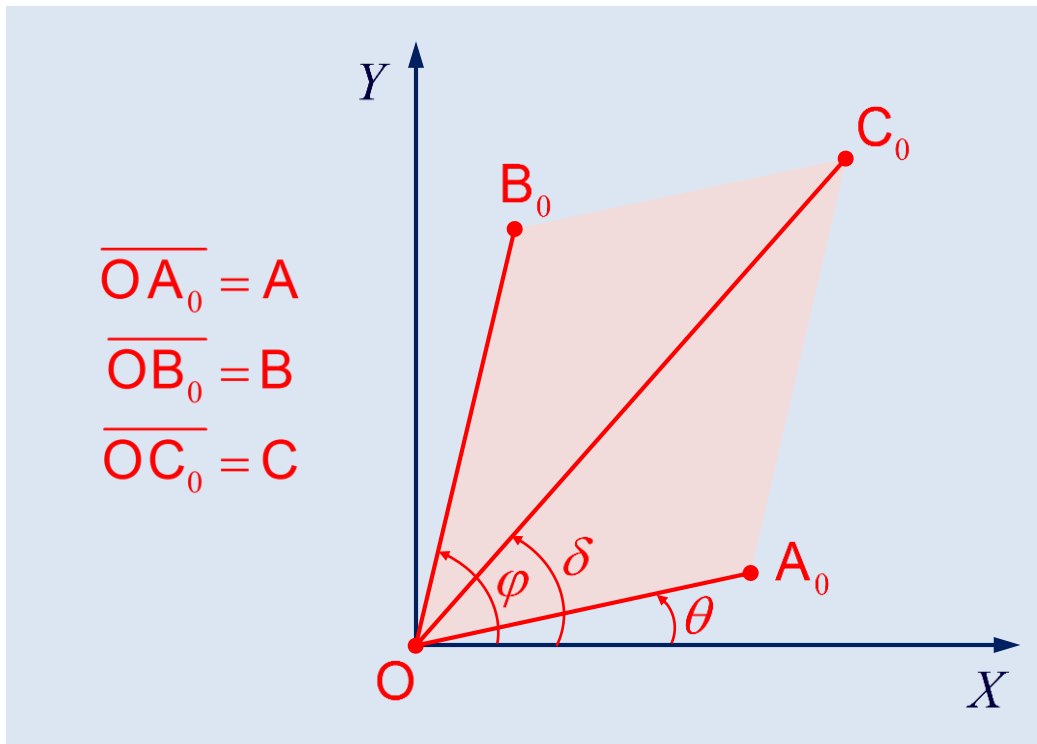
$$A_0 = A e^{i\theta} = A [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] .$$

Assim, obtém-se – efectivamente – que

$$\left[\begin{aligned} f(z, t) &= \Re \{ A_0 \exp[i(kz - \omega t)] \} \\ &= \Re \{ A \exp(i\theta) \exp[i(kz - \omega t)] \} \\ &= \Re \{ A \exp[i(kz - \omega t + \theta)] \} \\ &= A \cos(kz - \omega t + \theta). \end{aligned} \right.$$

Para se ver a utilidade da *notação complexa*, consideremos o seguinte exemplo. Suponhamos que se tem

$$\begin{cases} f_1(z,t) = A \cos(kz - \omega t + \theta) \\ f_2(z,t) = B \cos(kz - \omega t + \varphi) \end{cases} \mapsto \boxed{f_3(z,t) = f_1(z,t) + f_2(z,t) = C \cos(kz - \omega t + \delta)}$$



Pretende-se, agora, determinar a relação de (C, δ) com (A, B, θ, φ) . Vejamos (ver figura acima).

$$\begin{cases} f_1(z,t) = \Re \{ A_0 \exp[i(kz - \omega t)] \} \\ f_2(z,t) = \Re \{ B_0 \exp[i(kz - \omega t)] \} \\ f_3(z,t) = \Re \{ C_0 \exp[i(kz - \omega t)] \} \end{cases} \mapsto \begin{cases} A_0 = A \exp(i\theta) \\ B_0 = B \exp(i\varphi) \\ C_0 = C \exp(i\delta) \end{cases}$$

$$\therefore C_0 = A_0 + B_0 \mapsto \begin{cases} C \exp(i\delta) = A \exp(i\theta) + B \exp(i\varphi) \\ C \exp(-i\delta) = A \exp(-i\theta) + B \exp(-i\varphi) \end{cases}$$

donde se tira, após multiplicação ordenada,

$$\begin{cases} C^2 = [A \exp(i\theta) + B \exp(i\varphi)][A \exp(-i\theta) + B \exp(-i\varphi)] \\ = A^2 + AB \exp[i(\theta - \varphi)] + BA \exp[-i(\theta - \varphi)] + B^2 \\ = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta - \varphi) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta - \varphi)}}.$$

Analogamente, por divisão ordenada, obtém-se

$$\exp(2i\delta) = \frac{A \exp(i\theta) + B \exp(i\varphi)}{A \exp(-i\theta) + B \exp(-i\varphi)} = \frac{A \exp(i\theta)}{A \exp(-i\theta)} \frac{1 + \frac{B}{A} \exp[i(\varphi - \theta)]}{1 + \frac{B}{A} \exp[-i(\varphi - \theta)]}$$

$$\therefore \boxed{\exp(2i\delta) = \exp(2i\theta) \frac{1 + R \exp(i\Delta)}{1 + R \exp(-i\Delta)}},$$

onde se introduziram

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \frac{B}{A} \\ \Delta &= \varphi - \theta \end{aligned}}.$$

Notemos, entretanto, que se tem

$$\begin{cases} 1 + R \exp(i\Delta) = 1 + R \cos(\Delta) + i R \sin(\Delta) = \varrho \exp(i\Omega) \\ 1 + R \exp(-i\Delta) = 1 + R \cos(\Delta) - i R \sin(\Delta) = \varrho \exp(-i\Omega) \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{[1 + R \cos(\Delta)]^2 + [R \sin(\Delta)]^2} \\ \tan(\Omega) = \frac{R \sin(\Delta)}{1 + R \cos(\Delta)} \end{cases}$$

Infere-se, deste modo, que é

$$\frac{1 + R \exp(i\Delta)}{1 + R \exp(-i\Delta)} = \exp(2i\Omega) \Rightarrow \boxed{\exp(2i\delta) = \exp(2i\theta) \exp(2i\Omega)}.$$

Conclui-se, daqui, que se tem, portanto,

$$\delta = \theta + \Omega = \theta + \tan^{-1} \left[\frac{R \sin(\Delta)}{1 + R \cos(\Delta)} \right] \Rightarrow \boxed{\delta = \theta + \tan^{-1} \left[\frac{B \sin(\varphi - \theta)}{A + B \cos(\varphi - \theta)} \right]}.$$

No caso particular em que $\theta = \varphi$, então

$$\boxed{\theta = \varphi} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} \delta = \theta = \varphi \\ \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{array}}.$$

Por outro lado, no caso particular em que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, então (com $m \in \mathbb{Z}$)

$$\delta = \theta + \tan^{-1} \left[\frac{\sin(\varphi - \theta)}{1 + \cos(\varphi - \theta)} \right] = \theta + \tan^{-1} \left\{ \frac{2 \sin \left[\frac{1}{2}(\varphi - \theta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\varphi - \theta) \right]}{2 \cos^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi - \theta) \right]} \right\} = \theta + \frac{1}{2}(\varphi - \theta) \pm m\pi$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B}} \mapsto \boxed{\delta = \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \pm m\pi}.$$

Neste caso particular, também se tem

$$\mathbf{C} = \sqrt{2A^2 + 2A^2 \cos(\theta - \varphi)} = A \sqrt{2[1 + \cos(\theta - \varphi)]}.$$

Logo, como

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos^2 \left[\frac{1}{2}(\theta - \varphi) \right] - \sin^2 \left[\frac{1}{2}(\theta - \varphi) \right] = 2 \cos^2 \left[\frac{1}{2}(\theta - \varphi) \right] - 1,$$

$$\therefore \sqrt{1 + \cos(\theta - \varphi)} = \sqrt{2} \left| \cos \left[\frac{1}{2}(\theta - \varphi) \right] \right|,$$

pelo que

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B}} \mapsto \boxed{\mathbf{C} = 2A \left| \cos \left[\frac{1}{2}(\theta - \varphi) \right] \right|}.$$

Naturalmente que, se também se tiver $\theta = \varphi$, então vem simplesmente $\mathbf{C} = 2\mathbf{A}$.

A intensidade \mathbf{E} do campo eléctrico e a intensidade \mathbf{B} do campo magnético determinam a força (electromagnética) \mathbf{F} que o campo (electromagnético) exerce sobre uma carga eléctrica q de teste.

NOTA – Por carga eléctrica de *teste* entende-se uma carga (pontual) que dá origem a um campo electromagnético desprezável em relação ao campo electromagnético exterior (i.e., aplicado sobre a carga). Ou seja: considera-se que a carga de teste produz um campo nulo do ponto de vista prático.

A força \mathbf{F} é determinada pela expressão (*força de Lorentz*):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

onde \mathbf{v} é a velocidade da carga de teste. Assim, para uma carga eléctrica parada (i.e., em repouso em relação ao referencial em que o campo electromagnético é definido), tem-se

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E},$$

o que permite definir \mathbf{E} numa situação *electrostática*. Com efeito, vem (tem-se $\text{N} \cdot \text{C}^{-1} = \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Note-se, por outro lado, que *no vácuo* (em que $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$) a lei de Gauss eléctrica conduz a

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Assim, se uma carga Q (colocada na origem do sistema de coordenadas) produz um campo eléctrico \mathbf{E} , então – pelo teorema da divergência – verifica-se que

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

em qualquer ponto de uma superfície esférica de raio r centrada na carga Q . Por razões de simetria, o campo é *radial*, tendo-se

$$\text{campo electrostático de uma carga pontual } Q \mapsto \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r,$$

onde \mathbf{e}_r é o vector unitário radial. Logo, pela anterior discussão da força de Lorentz, uma carga de teste q , imersa neste campo, sofre a acção de uma força eléctrica

$$\boxed{\text{força de Coulomb}} \mapsto \boxed{\mathbf{F} = q \mathbf{E} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r}.$$

Esta é a conhecida expressão da *lei de Coulomb* em electrostática sobre a força entre duas cargas eléctricas (q, Q), no vácuo, com uma distância r entre elas.

Analogamente, se a carga q de teste, imersa no vácuo, se encontra animada de velocidade \mathbf{v} em relação a um referencial onde apenas existe um campo magnetostático \mathbf{B} (i.e., onde $\mathbf{E} = 0$), então a força magnética que se exerce sobre ela é dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

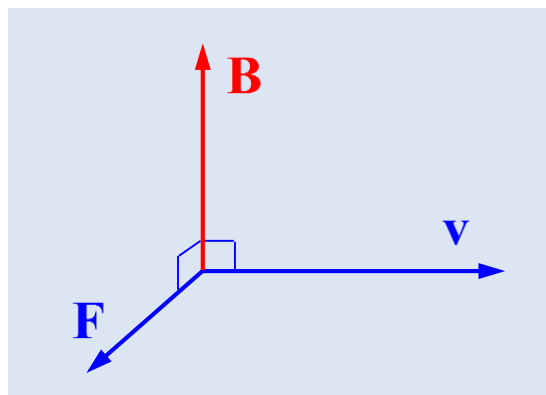
Assim, sendo $\theta = \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{B})$, vem

$$F = qvB \sin(\theta) \Rightarrow \boxed{B = \frac{F}{qv \sin(\theta)}}.$$

No caso particular em que $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ (i.e., quando $\theta = \pi/2$), obtém-se simplesmente

$$\boxed{B = \frac{F}{vq}}.$$

Esta última expressão permite determinar a intensidade do campo magnético (ver figura anexa).



Em conclusão: as equações de Maxwell permitem calcular o campo electromagnético produzido pelas fontes do campo (ρ, \mathbf{J}) . Por sua vez, a força de Lorentz permite calcular a força que se exerce sobre uma carga q de teste, animada pela velocidade \mathbf{v} , quando esta carga se encontra imersa num campo caracterizado pela intensidade (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

Coloca-se, agora, a seguinte questão: qual é a força de Lorentz que se exerce sobre uma distribuição contínua de carga ρ e densidade de corrente \mathbf{J} ? A resposta é a seguinte: nesse caso existe uma densidade de força \mathbf{f} (em unidades $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$) dada por

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} .$$

Em *magnetostática*, a equação de Maxwell-Ampère reduz-se à equação de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} .$$

No vácuo tem-se $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ e, portanto,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 .$$

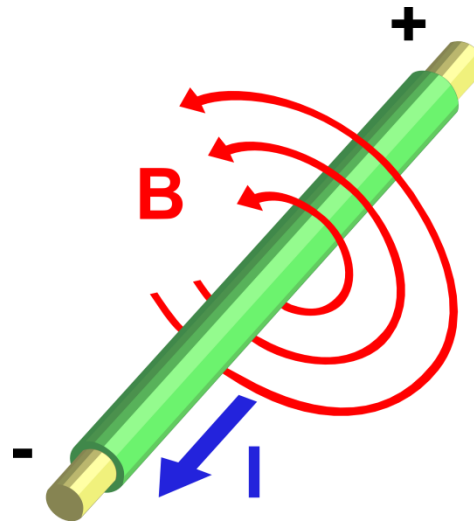
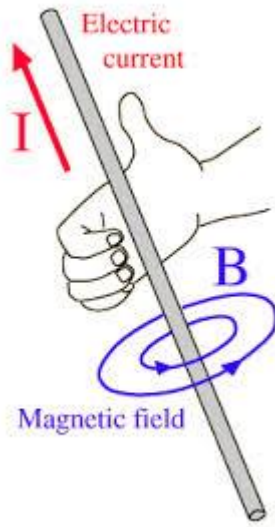
Suponhamos que temos uma corrente linear de intensidade I . O campo magnético criado por esta corrente é, pelo teorema de Stokes,

$$2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

Em termos vectoriais, tem-se (ver apêndice sobre coordenadas cilíndricas)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta .$$

Na página seguinte mostra-se a relação entre o sentido da corrente e a direcção do campo magnético.



Porém, para explicar a conservação da carga eléctrica, Maxwell introduziu a chamada *corrente de deslocamento*

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

É a corrente de deslocamento que justifica a corrente eléctrica num circuito contendo um condensador com um dieléctrico perfeito (i.e., com $\sigma = 0$) quando o circuito funciona em regime de corrente alternada sinusoidal. Assim, com efeito, a equação de Maxwell-Ampère escreve-se

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_D$$

Para um circuito imerso no vácuo, vem (em que $c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$)

$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Pelo teorema de Stokes, a respectiva superfície de Stokes tanto pode intersectar a corrente I (fora do condensador) como o vácuo ou ar (entre as placas do condensador) onde apenas as linhas de força da corrente de deslocamento existem. Assim

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

onde C é a capacidade do condensador e U a tensão entre as placas do condensador, com

$$\boxed{U = U_0 \sin(\omega t)} \Rightarrow \boxed{I = \omega C U_0 \cos(\omega t)}.$$

Logo, numa primeira aplicação do teorema de Stokes (ver figura anexa da página seguinte),

$$2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{B = \omega \frac{\mu_0 C U_0}{2\pi r} \cos(\omega t)}.$$

Com efeito,

$$2\pi r B = \oint_{\partial S} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = \int_{S_1} [(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s] d\sigma = \mu_0 \int_{S_1} (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\sigma = \mu_0 I.$$

Em corrente contínua (dc) é $\omega = 0$ e, como é sabido, não passa corrente no circuito (em regime forçado, excluindo o regime transitório). Logo, nesse caso, é $I = 0$ e, conseqüentemente, $B = 0$ também. Mas, em regime alternado sinusoidal (ac), é $\omega \neq 0$ e, portanto, $B \neq 0$ (i.e., no circuito passa, efectivamente, uma corrente).

Mas, por outro lado, também se tem (onde A é a área de cada placa do condensador e d a separação entre placas)

$$D = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{U}{d} = \varepsilon_0 \frac{U_0}{d} \sin(\omega t) \Rightarrow J_D = \frac{dD}{dt} = \omega \varepsilon_0 \frac{U_0}{d} \cos(\omega t)$$

$$\therefore 2\pi r B = \mu_0 A J_D \Rightarrow B = \frac{\mu_0 A J_D}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{B = \omega \varepsilon_0 \frac{\mu_0 A U_0}{2\pi r d} \cos(\omega t)},$$

através de uma segunda versão do teorema de Stokes:

$$2\pi r B = \oint_{\partial S} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = \int_{S_2} [(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s] d\sigma = \mu_0 \int_{S_2} (\mathbf{J}_D \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\sigma = \mu_0 (A J_D).$$

Logo, como a capacidade do condensador é (desprezando o efeito dos bordos)

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}},$$

infere-se que também se pode escrever

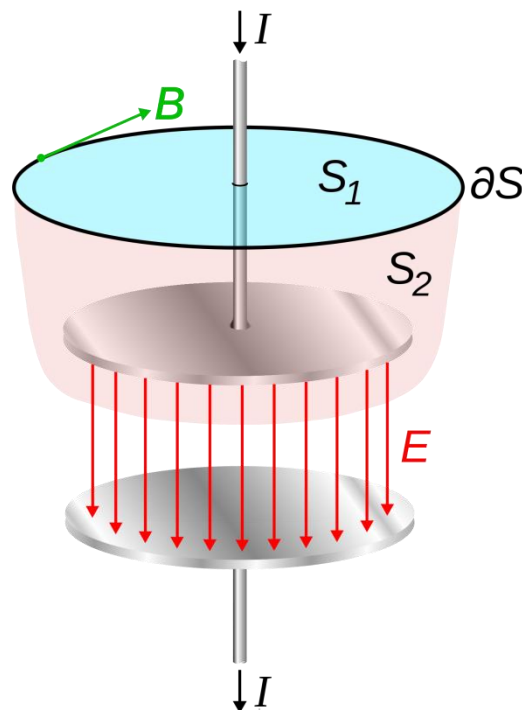
$$B = \omega \frac{\mu_0 C U_0}{2\pi r} \cos(\omega t) .$$

Esta última expressão do campo magnético, calculada usando a corrente de deslocamento, coincide com a expressão já obtida através da corrente de condução.

Se não existisse a corrente de deslocamento, a segunda aplicação do teorema de Stokes daria

$$B = 0 ,$$

em flagrante contradição com a primeira aplicação do teorema de Stokes. Só a existência da corrente de deslocamento permite que qualquer das duas aplicações do teorema de Stokes conduza ao mesmo resultado.



A corrente de deslocamento permite obter a *forma local* da *conservação da carga eléctrica* (a chamada *equação da continuidade*) no caso geral:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_D \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D .$$

Como $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, daqui decorre que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_D = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}).$$

Porém, invocando a lei de Gauss eléctrica, tem-se $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Assim, obtém-se efectivamente a *equação da continuidade*

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}.$$

Ou seja: sem a corrente de deslocamento não poderia verificar-se a conservação da carga eléctrica no caso geral (como no caso anterior do condensador). A *forma integral* da conservação da carga eléctrica obtém-se aplicando o teorema da divergência à equação da continuidade. Vem então

$$\boxed{\sum_{\alpha} I_{\alpha} = -\frac{dQ_V}{dt}}.$$

Com efeito, tem-se

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV = \int_{S_V} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_e) dS = \sum_{\alpha} I_{\alpha},$$

em que o somatório se estende a todas as correntes I_{α} que atravessam a superfície fechada S_V que delimita o volume V , contadas positivamente quando saem do volume e negativamente quando entram para esse mesmo volume. Por outro lado, integrado em volume o segundo membro da equação da continuidade, obtém-se

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\frac{dQ_V}{dt},$$

em que, portanto, Q_V representa toda a carga eléctrica contida no volume V .

A *interpretação física* da equação da conservação da carga eléctrica é, agora, óbvia. Quando o primeiro membro é positivo, i.e., quando $\sum_{\alpha} I_{\alpha} > 0$, é porque sai mais corrente do volume do que aquela que entra. Então, quando sai mais corrente do que a que entra, é porque a carga eléctrica Q_V

está a diminuir ao longo do tempo, i.e., tem-se $dQ_V/dt < 0$ e, conseqüentemente, $-dQ_V/dt > 0$. Naturalmente que, de forma análoga, quando $\sum_{\alpha} I_{\alpha} < 0$ tem-se $dQ_V/dt > 0$ e, neste caso, $-dQ_V/dt < 0$. Só quando $\sum_{\alpha} I_{\alpha} = 0$ é que, em rigor, se tem $dQ_V/dt = 0$.

NOTA – Só em *regime estacionário* é que a lei da conservação da carga eléctrica $\sum_{\alpha} I_{\alpha} = -\frac{dQ_V}{dt}$ se reduz à forma $\sum_{\alpha} I_{\alpha} = 0$. Esta última forma é conhecida pela *lei dos nós de Kirchoff* (em inglês: *Kirchoff's current law*, KCL). Em rigor, só em regime estacionário, portanto, é que é possível definir – sem qualquer ambigüidade – o conceito de corrente. A lei dos nós corresponde, portanto, a desprezar a corrente de deslocamento $\mathbf{J}_D = \partial \mathbf{D} / \partial t$, i.e., corresponde – na forma diferencial – à lei de Ampère $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ que, para meios não-magnéticos, equivale a ter-se $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ já que, nesse caso, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Ondas Planas e Monocromáticas

Vai-se, agora, considerar o caso em que as soluções das equações de Maxwell são – para regiões sem fontes do campo – ondas planas e monocromáticas. Os meios considerados são homogéneos e isotrópicos

As equações de Maxwell, no domínio do tempo e para regiões sem fontes (i.e., em que $\mathbf{J} = 0$ e também $\rho = 0$) escrevem-se na forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Grupo} \\ \text{de} \\ \text{Faraday} \end{array}} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}_\omega = -\frac{\partial \mathbf{B}_\omega}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_\omega = 0 \end{array} \right. \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{Grupo} \\ \text{de} \\ \text{Maxwell} \end{array}} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H}_\omega = \frac{\partial \mathbf{D}_\omega}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_\omega = 0 \end{array} \right.$$

Em tudo o que se segue considera-se o seguinte caso:

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \\ \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{D}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \\ \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \end{array} \right]$$

em que

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \end{array} \right]$$

Por exemplo: no caso do campo eléctrico, vem então

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) &= \Re\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} = \Re\{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \} \\ &= \Re\{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \} \end{aligned}$$

onde, no caso geral, \mathbf{E}_0 é um vector complexo constante, i.e., $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$ tal que

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2$$

mas onde $\mathbf{E}_1 \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^3$ são vectores reais: $\mathbf{E}_1 = \Re\{\mathbf{E}_0\}$ e $\mathbf{E}_2 = \Im\{\mathbf{E}_0\}$.

NOTA IMPORTANTE – Como se verá adiante, quando se estudar a polarização, verificar-se-á que um vector complexo (como é o caso de \mathbf{E}_0) corresponde a uma realidade geométrica radicalmente diferente de um vector real (como é o caso tanto de \mathbf{E}_1 como de \mathbf{E}_2). Com efeito, os vectores reais podem ser representados por setas no espaço ordinário tridimensional. Mas o mesmo não se aplica ao caso dos vectores complexos que, em geral, podem ser representados por elipses orientadas que – em certas circunstâncias – degeneram em segmentos de recta bidireccionais (i.e., percorridos em ambos os sentidos possíveis) ou ainda em circunferências orientadas. É a esta representação geométrica dos vectores complexos que se dá o nome de polarização.

Note-se que, também no caso geral, o *vector de onda* \mathbf{k} é, também, um vector complexo:

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta} + i \boldsymbol{\alpha} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \Re\{\mathbf{k}\} \\ \boldsymbol{\alpha} = \Im\{\mathbf{k}\} \end{cases}$$

em que, portanto, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$ e $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. Nestas condições, tem-se

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = i[(\boldsymbol{\beta} + i \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{r}] = i(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}).$$

Daqui resulta, então, que

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) &= \Re\left\{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \right\} \\ &= \Re\left\{ (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) \exp[i(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \exp[-(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})] \right\} \\ &= \Re\left\{ (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) [\cos(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + i \sin(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \right\} \exp[-(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})] \\ &= \mathbf{E}_1 \cos(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \exp[-(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})] - \mathbf{E}_2 \sin(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \exp[-(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})] \end{aligned} \right.$$

$$\therefore \quad \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \left\{ \mathbf{E}_1 \cos(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \mathbf{E}_2 \sin(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \right\} \exp[-(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})].$$

Podemos, deste modo, designar o vector real $\boldsymbol{\beta} = \beta_x \mathbf{e}_1 + \beta_y \mathbf{e}_2 + \beta_z \mathbf{e}_3$ por *vector de fase* e o vector real $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_x \mathbf{e}_1 + \alpha_y \mathbf{e}_2 + \alpha_z \mathbf{e}_3$ por *vector de atenuação*. Note-se, ainda, que – no caso geral – os vectores $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ não são paralelos. Note-se que, quando $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, a onda plana e monocromática é uma onda *não-uniforme*; caso contrário (i.e., quando $\boldsymbol{\alpha} = 0$) a onda diz-se *uniforme*. Sendo

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

o vector posição, tem-se

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} = \beta_x x + \beta_y y + \beta_z z, \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z. \end{cases}$$

Sublinhe-se, contudo, o seguinte: basta conhecer o vector complexo \mathbf{E}_0 ou, em alternativa, os dois vectores reais $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ para se determinar completamente a *polarização* da onda plana e monocromática $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)$.

EXEMPLO – Admitamos que a nossa onda plana e monocromática é *não-uniforme* e se propaga no *vácuo*. Tem-se, portanto, $\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}$ e, além disso, $\mathbf{k}^2 = k_0^2$, com $k_0 = \omega/c$. Então, daqui decorre que $\mathbf{k}^2 = (\boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha})^2 = (\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2) + 2i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) = k_0^2$. Como sempre, faz-se $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\beta}^2 = |\boldsymbol{\beta}|^2$ e $\boldsymbol{\alpha}^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2$. Conclui-se, neste caso, que se tem: $\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2 = k_0^2$ e, ainda, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$. A primeira equação diz-nos que $\beta^2 = \alpha^2 + k_0^2$ (com $\beta = |\boldsymbol{\beta}|$ e $\alpha = |\boldsymbol{\alpha}|$). A segunda equação, por sua vez, diz-nos que os planos de fase constante são perpendiculares aos planos de atenuação constante.

Doravante, porém, centramos a nossa análise em ondas planas e monocromáticas uniformes, i.e., em que é possível fazer $\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta}$. Neste caso, vem

$$\nabla \{ \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \} = i\mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

e, portanto, como $\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$, tem-se

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})]$$

ou, simplificando a notação,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = i(\mathbf{k} \times \mathbf{E})}.$$

Com efeito, vem sucessivamente:

$$\left| \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \} \\ &= (\nabla \times \mathbf{E}_0) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \nabla \{ \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \} \times \mathbf{E}_0 \\ &= \nabla \{ \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \} \times \mathbf{E}_0 \\ &= i(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \\ &= i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \end{aligned} \right.$$

Mas então, será ainda

$$\left| \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \Re \{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \} \\ &= \Re \{ \nabla \times \{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \} \} \\ &= \Re \{ i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \} \end{aligned} \right.$$

$$\therefore \boxed{\nabla \times \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \{ i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \}}.$$

Analogamente, viria

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \{ i[\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \}}.$$

Também se teria, porque $\nabla \cdot \mathbf{D}_0 = 0$, que

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \{ i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \}}.$$

Analogamente,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \{ i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t) \}}.$$

Vejam, agora, as derivadas em ordem ao tempo. Obviamente que

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Re\{\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\} \right\}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{-i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\}}$$

e, analogamente,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{-i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\}}.$$

Mas então, ao resolver as equações de Maxwell da página 18, basta ter em consideração as seguintes equações algébricas:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Grupo} \\ \text{de} \\ \text{Faraday} \end{array}} \mapsto \begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{Grupo} \\ \text{de} \\ \text{Maxwell} \end{array}} \mapsto \begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \end{cases}$$

Se, depois de um problema resolvido, for necessário conhecer as soluções no domínio do tempo, então basta multiplicar os campos (\mathbf{E}, \mathbf{B}) e (\mathbf{D}, \mathbf{H}) por $\exp(-i\omega t)$ e, depois, extrair as respectivas partes reais.

No que se segue vai-se considerar o seguinte caso: o campo electromagnético apenas atravessa um meio *homogéneo e isotrópico* caracterizado pelas seguintes *relações constitutivas*:

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})}$$

em que (ε, μ) são constantes *adimensionais*. A saber: ε representa a *permissividade eléctrica relativa* do material; μ representa a *permeabilidade magnética relativa* do material. O vácuo corresponde ao caso especial em que se tem

$$\boxed{\text{Vácuo}} \mapsto \boxed{\varepsilon = \mu = 1}.$$

Também, em tudo o que se segue, apenas se aborda o seguinte caso: os meios são *duplamente positivos* ou DPS, i.e., tem-se:

$$\boxed{\text{Meios DPS}} \mapsto \boxed{\varepsilon > 0, \mu > 0}.$$

Sublinhe-se o seguinte: as relações constitutivas são escritas no domínio da frequência – tal como as equações de Maxwell (ver página anterior).

Assim, conjugando as equações de Maxwell com as relações constitutivas, infere-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Estas quatro equações são, agora, simples equações da álgebra vectorial. A sua resolução é (quase) imediata. Atendendo a que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

e introduzindo o conceito de *índice de refração* n do material, tal que

$$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon \mu}},$$

obtém-se

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mu_0 \mu (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \mathbf{H}, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}. \end{cases}$$

Porém, como já se viu anteriormente, a constante de propagação (ou número de onda) do vácuo é precisamente

$$\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}}, \quad [k_0] = \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}, \quad [c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad [\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad [f] = \text{Hz}.$$

Logo, infere-se que

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -n^2 k_0^2 \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -n^2 k_0^2 \mathbf{H}. \end{cases}$$

Mas, sendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ três vectores reais do espaço ordinário tridimensional (euclidiano), a regra do duplo produto externo estabelece que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Neste caso particular, tem-se então

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{H} \end{cases}$$

mas, como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$, infere-se finalmente que

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = n^2 k_0^2 \Rightarrow \boxed{k = n k_0}.$$

No caso do vácuo (ou, muito aproximadamente, do ar) confirma-se que $k = k_0$ pois $n = 1$.

Um outro aspecto importante a reter é o seguinte. Consideremos as equações

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}), \\ \mathbf{E} = -\frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} (\mathbf{k} \times \mathbf{H}). \end{cases}$$

Seja $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$ o versor (ou vector unitário) correspondente ao vector de onda \mathbf{k} . Então

$$\boxed{\mathbf{k} = (n k_0) \hat{\mathbf{k}}},$$

com

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{k_x \mathbf{e}_1 + k_y \mathbf{e}_2 + k_z \mathbf{e}_3}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}.$$

Portanto

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \frac{\mathbf{k}}{\omega \mu_0} = \frac{nk_0}{\omega \mu_0} \hat{\mathbf{k}} = n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \hat{\mathbf{k}}, \quad \frac{\mathbf{k}}{\omega \varepsilon_0} = \frac{nk_0}{\omega \varepsilon_0} \hat{\mathbf{k}} = n \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \hat{\mathbf{k}}.$$

Logo, introduzindo a *impedância do vácuo* η_0 , tal que

$$\boxed{\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad [\eta_0] = \Omega,}$$

obtém-se

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \frac{n}{\mu \eta_0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}), \\ \mathbf{E} = -\frac{n \eta_0}{\varepsilon} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}). \end{cases}$$

Por vezes é também introduzida a impedância relativa ou normalizada (adimensional)

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\mu}{n} = \frac{n}{\varepsilon}}.$$

Com esta última definição vem finalmente

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\eta_0 \eta} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \\ \mathbf{E} &= -\eta_0 \eta (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}) \end{aligned}}$$

o que mostra como a sequência ordenada $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\mathbf{k}})$ constitui, no espaço tridimensional, um triedro direito, a saber:

$$\mathbf{S}_c = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2\eta_0 \eta} [\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}^*)] = \frac{1}{2\eta_0 \eta} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{k}} - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathbf{E}^*],$$

ou, como $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = |\mathbf{E}|^2$ e $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0$,

$$\boxed{\mathbf{S}_c = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta_0 \eta} \hat{\mathbf{k}}}.$$

Esta última equação também mostra como o *vector de Poynting complexo* $\mathbf{S}_c = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*/2$ é, neste caso, paralelo à direcção $\hat{\mathbf{k}}$ do vector de onda. Note-se que

$$\begin{cases} \mathbf{S}_c [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}] & \mapsto \text{vector de Poynting} \\ \mathcal{E} [\text{J}] & \mapsto \text{energia} \end{cases}$$

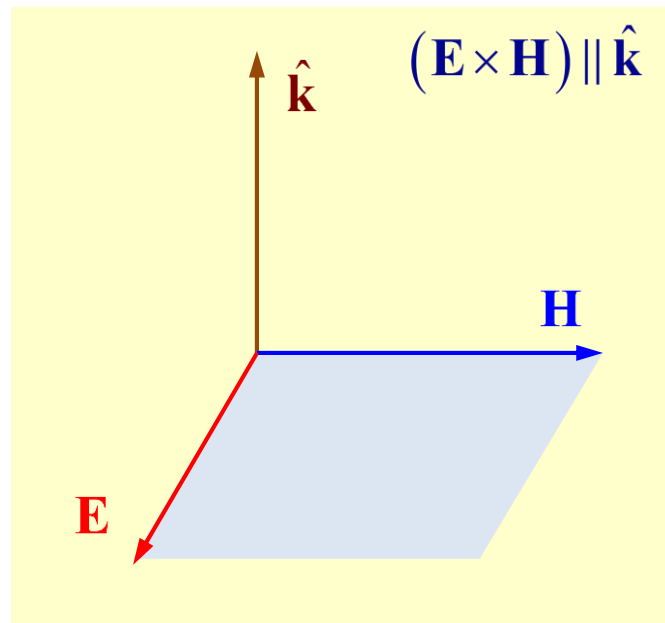
i.e., o vector de Poynting complexo caracteriza a densidade superficial do fluxo de potência, ou seja, o fluxo de potência por unidade de superfície.

EXEMPLO – Uma onda electromagnética esférica pode ser caracterizada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r = ct$. Se se admitir que esta onda provém da radiação de uma antena pontual e isotrópica, que radia no vácuo uma potência P_e , então – se não houver perdas – a intensidade do campo eléctrico E será a mesma em todos os pontos (num dado instante t) da superfície esférica de raio r com uma área $A = 4\pi r^2$. Ou seja: o vector de Poynting complexo tem uma amplitude $S_c = |\mathbf{E}|^2 / 2\eta_0 = P_e / (4\pi r^2)$. Infere-se, portanto, que o campo eléctrico é tal que $|\mathbf{E}|^2 = (\eta_0 P_e) / (2\pi r^2)$, donde se tira que $|\mathbf{E}| \propto 1/r$, i.e., o campo eléctrico varia (na zona distante) com o inverso da distância à respectiva antena.

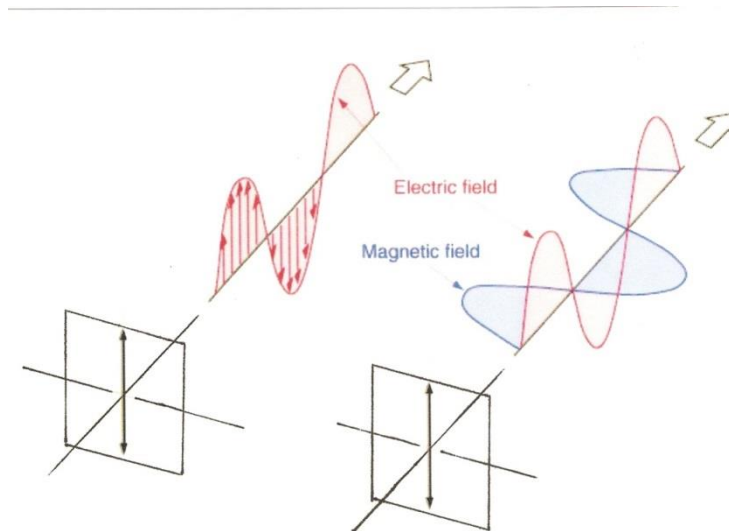
NOTA – Devido ao facto de se usar a letra $E \mapsto$ (fonte: Times New Roman) para representar o campo eléctrico, é necessário utilizar uma fonte diferente para designar a energia. Por essa razão usa-se a letra $\mathcal{E} \mapsto$ (fonte: \mathfrak{C} uclíid \mathfrak{F} raaktur) para representar a energia.

Na figura anexa da página seguinte mostra-se o triedro direito formado pela sequência ordenada de vectores $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\mathbf{k}})$ de uma onda plana e monocromática (a propagar-se num meio DPS ilimitado). Os vectores (\mathbf{E}, \mathbf{H}) definem o *plano transversal* à direcção (*longitudinal*) de propagação da onda, sendo essa direcção caracterizada pelo vector unitário $\hat{\mathbf{k}}$. Além disso, o produto externo (de Gibbs)

entre o campo eléctrico e a excitação magnética aponta na mesma direcção e sentido que o versor $\hat{\mathbf{k}}$ do vector de onda \mathbf{k} (que é paralelo ao vector de Poynting instantâneo. i.e., tem-se $\mathbf{S} \parallel \hat{\mathbf{k}}$).



ONDA TEM – Dado que numa onda deste tipo quer o campo eléctrico \mathbf{E} quer a excitação magnética \mathbf{H} residem no plano transversal (perpendicular a $\hat{\mathbf{k}}$), designa-se este tipo de onda por onda **TEM** (do inglês: *transverse electric and magnetic*). Note-se que – como $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ (com $\mu > 0$) – então ainda se pode afirmar que, neste caso, é também $\mathbf{B} \parallel \mathbf{H}$.



O índice de refração de um material (homogéneo, isotrópico e sem perdas) não é uma constante (independente da frequência). É necessário ter em consideração que $n = n(\omega)$:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{dn}{d\lambda} = \frac{dn}{d\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} = \left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) \frac{dn}{d\omega}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dn}{d\lambda} = \left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) \frac{dn}{d\omega}}$$

Ou seja: o índice de refração depende do comprimento de onda $\lambda = c/f$ (medido no vácuo).
Vejam alguns exemplos dados por equações empíricas de Sellmeier para intervalos $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ bem definidos. Nestas fórmulas λ deve ser (sempre) expresso em $[\mu\text{m}]$.

Silício (Si)

Intervalo: $1.36 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 11 \mu\text{m}$

$$\boxed{n^2 = 1 + \frac{10.6684293 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.301516485)^2} + \frac{0.003043475 \lambda^2}{\lambda^2 - (1.13475115)^2} + \frac{1.54133408 \lambda^2}{\lambda^2 - (1104.0)^2}}$$

Arsenieto de gálio (GaAs)

Intervalo: $1.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 11 \mu\text{m}$

$$\boxed{n^2 = 3.5 + \frac{7.4969 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.4082)^2} + \frac{1.9347 \lambda^2}{\lambda^2 - (37.17)^2}}$$

Fosfeto de índio (InP)

Intervalo: $0.95 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 10 \mu\text{m}$

$$n^2 = 7.255 + \frac{2.316 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.6263)^2} + \frac{2.765 \lambda^2}{\lambda^2 - (32.935)^2}$$

Sílica (ou dióxido de silício: SiO₂) fundida

Intervalo: $0.21 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 3.71 \mu\text{m}$

$$n^2 = 1 + \frac{0.6961663 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.0684043)^2} + \frac{0.4079426 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.1162414)^2} + \frac{0.8974794 \lambda^2}{\lambda^2 - (9.896161)^2}$$

A sílica fundida (ou quartzo fundido) é uma espécie de vidro constituído por sílica amorfa (i.e., não cristalina). Trata-se do material básico utilizado no fabrico das *fibras ópticas* (convencionais), com baixas perdas, utilizadas nos actuais sistemas de comunicação óptica. A figura anexa da página seguinte mostra a correspondente variação do índice de refração de acordo com a respectiva equação de Sellmeier:

$$n^2 = 1 + \frac{A \lambda^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{B \lambda^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{C \lambda^2}{\lambda^2 - c^2} \Rightarrow 2n \frac{dn}{d\lambda} = -2 \left[\frac{a^2 A \lambda}{(\lambda^2 - a^2)^2} + \frac{b^2 B \lambda}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 C \lambda}{(\lambda^2 - c^2)^2} \right]$$

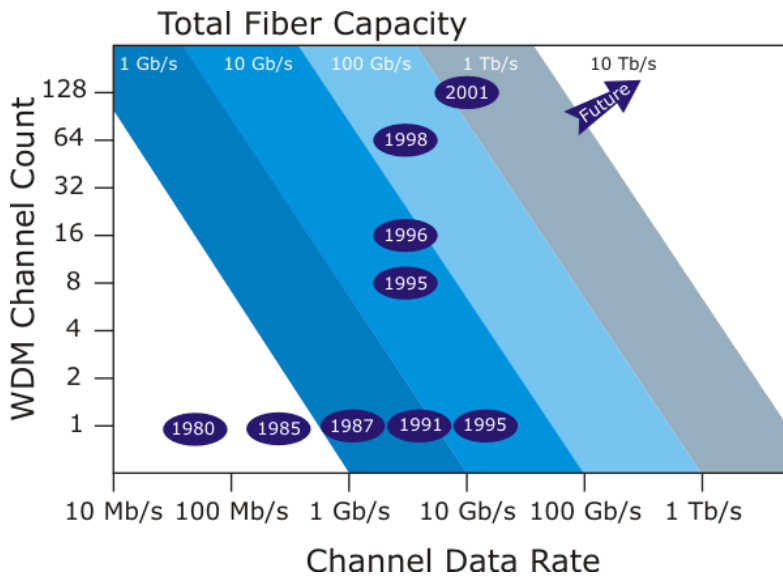
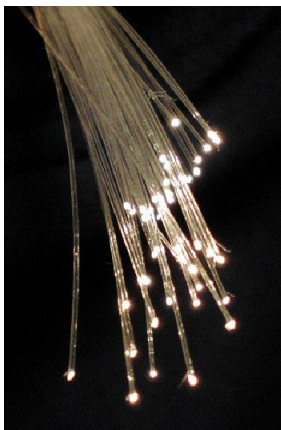
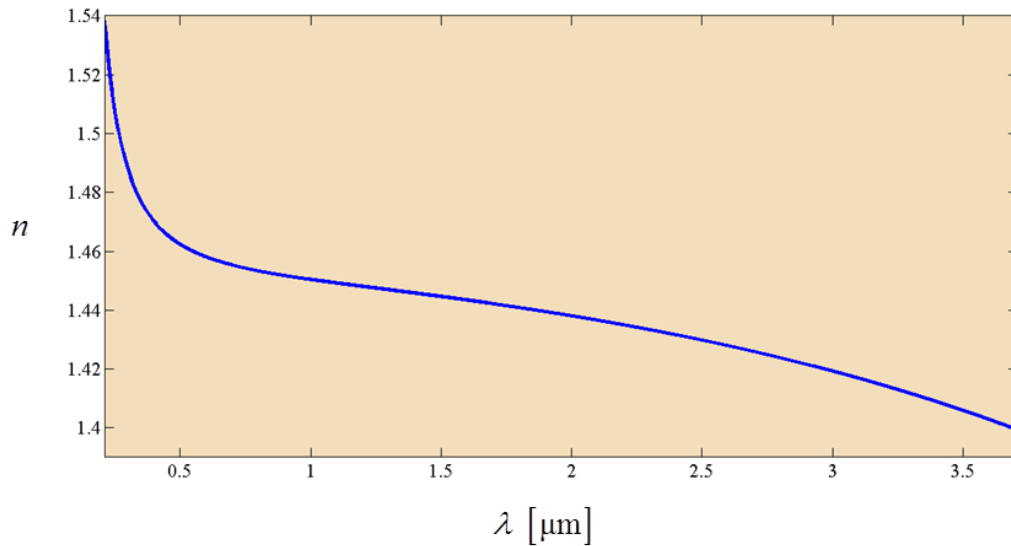
$$\therefore \left[\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{1}{n} \left[\frac{a^2 A \lambda}{(\lambda^2 - a^2)^2} + \frac{b^2 B \lambda}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 C \lambda}{(\lambda^2 - c^2)^2} \right] \right],$$

em que

$$\begin{array}{l} A = 0.6961663 \quad B = 0.4079426 \quad C = 0.8974794 \\ a = 0.0684043 \quad b = 0.1162414 \quad c = 9.896161 \end{array}$$

Sílica fundida

Variação do índice de refração com o comprimento de onda



Em termos da QED (*quantum electrodynamics*) o campo electromagnético é composto por entidades discretas designadas por *fotões*. Diz-se, por isso, que o *fotão* é o *quantum* de radiação electromagnética. O fotão manifesta-se, em certas experiências, como tendo características similares ao conceito macroscópico de corpúsculo. Porém, noutras experiências, o fotão manifesta – essencialmente – características similares ao conceito macroscópico de onda. Este dualismo onda-corpúsculo é uma manifestação do seguinte: o mundo microscópico, quântico, resiste ao nosso quadro mental forjado na experiência macroscópica – mais familiar – e, portanto, não é admissível impor uma interpretação física antropomórfica ao universo quântico. Além disso, como mostram as várias desigualdades de Bell, existe uma *não-localidade quântica* (mais conhecida como *spooky action at a distance*, consequência do *entrelaçamento quântico* ou *quantum entanglement*) que advém do que se poderia designar por *metafísica experimental* – nomeadamente das experiências posteriores à experiência de Aspect *et al.* que permitem refutar experimentalmente a visão racionalista (mas que se provou errada) expressa por EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) por contraposição à visão mais obscurantista e irracionalista (mas que se provou correcta) de Bohr e Heisenberg. Sobre estes assuntos o estudante mais interessado pode consultar:

- ▣ N. David Mermin, *Boojums All The Way Through – Communicating Science In a Prosaic Age*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990 (pp. 81—203).
- ▣ Giancarlo Ghirardi, *Sneaking a Look at God's Cards – Unraveling the Mysteries of Quantum Mechanics, Revised Edition*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.
- ▣ Tim Maudlin, *Quantum Non-Locality & Relativity – Metaphysical Intimations of Modern Physics, Third Edition*. Chichester, UK: Wiley-Blackwell, 2011.

Não deixa, também, de ser sintomático o seguinte: a visão filosófica de Sir Karl Popper, mais racionalista, estava essencialmente errada no que à mecânica quântica dizia respeito. E, não deixa de ser inquietante, que a visão mais (aparentemente) anti-científica de Thomas Kuhn resista (muito) melhor ao edifício (misterioso) da mecânica quântica.

Em termos da mecânica quântica, a energia de um fotão apenas depende da sua frequência f : ela é dada por

$$\mathcal{E} = hf = h\omega$$

onde h é a constante de Planck e, por sua vez, $\hbar = h/(2\pi)$ é a constante *reduzida* de Planck. Tem-se:

$$h = 6.62606957(29) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad \hbar = 1.054571726(47) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Vejamos um exemplo. Um fóton correspondente à cor verde, com uma frequência $f = 540 \text{ Tz}$, tem um comprimento de onda $\lambda = c/f = 555 \text{ nm}$ (trata-se do comprimento de onda aproximado a que o olho humano é mais sensível). Então, a correspondente energia desse fóton é $\mathcal{E} = 3.58 \times 10^{-19} \text{ J}$. Já uma mole destes fótons tem uma energia muito maior: $N_A \mathcal{E} = 216 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Para terminar o estudo desta secção vai-se analisar, agora, um problema mais geral: meios caracterizados por três parâmetros (ϵ, μ, σ) , em vez de (apenas) dois parâmetros (ϵ, μ) como até aqui. O novo parâmetro é a *condutividade* σ e aparece na *lei de Ohm* $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.

$$\begin{array}{l} \left[\sigma \left[\text{S} \cdot \text{m}^{-1} \right] \right] \mapsto \text{condutividade} \\ \left[\rho \left[\Omega \cdot \text{m} \right] \right] \mapsto \text{resistividade} \end{array} \quad \boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}} \mapsto \boxed{\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}}$$

Tabela 4. Condutividade de alguns condutores

Condutor	Condutividade a 20°C
Prata	$6.30 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Cobre	$5.80 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Ouro	$4.10 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Alumínio	$3.50 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Ferro	$1.00 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Platina	$9.43 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Estanho	$9.17 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Chumbo	$4.55 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Titânio	$2.38 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

EXEMPLO – Consideremos um fio de cobre, cilíndrico, de comprimento $\ell = 100$ m e diâmetro $\phi = 2a = 1$ mm. Pretende-se determinar a *velocidade de deriva* $\langle v \rangle$ dos electrões, neste condutor, quando o fio é submetido a uma tensão eléctrica $U = 10$ V. Começemos, então, por calcular a resistência R do fio. Sendo $A = \pi a^2 = 7.8540 \times 10^{-7}$ m² a área da secção transversal e $\sigma = 5.80 \times 10^7$ S · m⁻¹ a condutividade do cobre, obtém-se

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma A}} \Rightarrow R = 2.1952 \, \Omega,$$

pelo que a corrente I , que atravessa o fio, é

$$\boxed{I = \frac{U}{R}} \Rightarrow I = 4.5553 \, \text{A}.$$

O campo eléctrico E , no interior do condutor, é então

$$\boxed{E = \frac{U}{\ell}} \Rightarrow E = 0.1 \, \text{Vm}^{-1}.$$

Assim, a densidade de corrente J , no condutor, será (pela forma local da lei de Ohm)

$$\boxed{J = \sigma E} \Rightarrow \boxed{J = \frac{I}{A}} \Rightarrow J = 5.8 \times 10^6 \, \text{A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Vejam, agora, qual é a densidade volúmica de carga no fio condutor de cobre. Sendo d a densidade do cobre, M a respectiva massa molar, q_0 o valor da carga elementar (módulo da carga do electrão) e $f = 1$ o número de electrões livres por cada átomo de cobre, tem-se

$$\left[\begin{array}{l} d = 8.96 \times 10^3 \, \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ M = 63.5 \times 10^{-3} \, \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1} \\ q_0 = 1.60217657 \times 10^{-19} \, \text{C} \\ N_A = 6.0221413 \times 10^{23} \end{array} \right] \Rightarrow \boxed{\rho = \left(\frac{N_A d}{M} \right) (q_0 f)} \Rightarrow \rho = 1.3614 \times 10^{10} \, \text{C} \cdot \text{m}^{-3},$$

onde N_A é o número de Avogadro. Logo, a velocidade de deriva dos electrões, $\langle v \rangle$, é tal que

$$\boxed{J = \rho \langle v \rangle} \Rightarrow \sigma E = \rho \langle v \rangle \Rightarrow \boxed{\langle v \rangle = \frac{\sigma}{\rho} E} \Rightarrow \langle v \rangle = 4.2602 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Frequentemente, define-se a *mobilitade eléctrica* μ dos portadores de carga, tal que

$$\boxed{\langle v \rangle = \mu E}.$$

No caso em análise, obtém-se uma mobilidade

$$\mu = \frac{\langle v \rangle}{E} = 42.6022 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Note-se que se está a considerar um *meio homogéneo* num caso operado em *regime estacionário* em que o campo eléctrico é *uniforme* (não varia de ponto para ponto no interior do condutor) e *constante* (não varia com o tempo). Assim, a existência de *colisões* entre partículas diminui a velocidade dos electrões, produzindo a chamada velocidade de deriva. Note-se que, na ausência de colisões, o cenário seria muito diferente. Vejamos.

De acordo com a força de Lorentz, ter-se-ia (no interior do condutor, mas agora admitindo – por hipótese absurda – que os electrões livres não colidiam)

$$\boxed{F = q_0 E} \Rightarrow F = 1.6022 \times 10^{-20} \text{ N}.$$

Logo, usando a equação de Newton, obter-se-ia uma aceleração constante α , tal que

$$\boxed{F = m_0 a} \Rightarrow a(t) = \frac{F}{m_0} = \alpha \Rightarrow \alpha = 1.7588 \times 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

onde se considerou que a massa do electrão é $m_0 = 9.10938291 \times 10^{-31} \text{ kg}$. Então, se isto estivesse correcto, a velocidade cresceria linearmente com o tempo:

$$\boxed{a(t) = \alpha = \frac{dv}{dt}} \Rightarrow \boxed{v(t) = v(0) + \alpha t}.$$

Mas esta conclusão está *errada* por duas razões: (i) a primeira razão, e a mais fundamental, tem a ver com o que se disse atrás sobre colisões (apenas se pode falar da velocidade *média* dos electrões – a velocidade de deriva); (ii) a segunda razão, menos importante neste caso, é que a mecânica newtoniana está errada (a velocidade limite de uma qualquer partícula é $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Assim, as relações constitutivas dos meios a considerar, de seguida, serão:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{cases} .$$

Note-se que isto é equivalente a introduzir uma permissividade eléctrica relativa complexa da forma $\varepsilon_c = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Com efeito tem-se

$$i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = \sigma \mathbf{E} - i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_c \mathbf{E} = -i\omega \varepsilon_0 (\varepsilon' + i\varepsilon'') \mathbf{E}$$

desde que se faça

$$\begin{cases} \sigma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon'' \\ \varepsilon = \varepsilon' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 (\varepsilon' + i\varepsilon'') \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

pelo que existem, para meios condutores ou dieléctricos imperfeitos, as duas descrições alternativas baseadas em três parâmetros: (i) $(\varepsilon = \varepsilon', \mu, \sigma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon'')$; (ii) $(\varepsilon' = \varepsilon, \varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}, \mu)$.

Neste caso, portanto, em vez das equações da página 23, escreve-se:

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -i\sigma \mathbf{E} - \omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0. \end{cases}$$

Assim, consequentemente, virá (uma vez que $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{k}}$ com $k = \beta + i\alpha$)

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \frac{\beta + i\alpha}{\omega \mu_0 \mu} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}), \\ \mathbf{E} = -\frac{\beta + i\alpha}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon + i\sigma} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}). \end{cases}$$

Repetindo o processo análogo ao caso dos dieléctricos perfeitos, tira-se que

$$\boxed{k^2 = n^2 k_0^2 + i \omega \mu_0 \mu \sigma}.$$

Mas, por outro lado, tem-se

$$k^2 = (\beta + i\alpha)^2 = (\beta^2 - \alpha^2) + 2i\alpha\beta.$$

Assim, igualando as duas expressões para k^2 , obtém-se

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = n^2 k_0^2 \\ 2\alpha\beta = \omega \mu_0 \mu \sigma \end{cases} \Rightarrow \boxed{4\beta^4 - 4n^2 k_0^2 \beta^2 - \omega^2 \mu_0^2 \mu^2 \sigma^2 = 0}$$

pelo que, escolhendo a solução apropriada, vem finalmente

$$\begin{cases} \beta = \frac{nk_0}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \\ \alpha = \frac{nk_0}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \end{cases}.$$

Note-se que, deste modo, também se pode escrever

$$k = nk_0 \sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} \exp(i\vartheta), \quad \tan(\vartheta) = \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^{-1} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} - 1 \right],$$

tendo-se

$$\begin{cases} \cos(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \\ \sin(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}. \end{cases}$$

Antes de mais nada convém reescrever a solução alternativa quando se escolhe – em vez da condutividade – uma descrição baseada numa permitividade eléctrica relativa complexa

$$\varepsilon_c = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} .$$

Vem:

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon' \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} .$$

$$\alpha = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon' \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} .$$

A onda plana e monocromática não é uniforme: $\alpha \neq 0$. Fazendo $\theta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ é, com $r = |\mathbf{r}|$,

$$\zeta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = r \cos(\theta) \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k \zeta .$$

Logo, infere-se que

$$\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \exp(ik\zeta) = \exp[i(\beta + i\alpha)\zeta] = \exp(i\beta\zeta) \exp(-\alpha\zeta) .$$

A velocidade de fase é, portanto, dada por (com $\omega = 2\pi f$ e $\beta = 2\pi/\lambda$)

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f \Rightarrow v_p = c \frac{k_0}{\beta} = \sqrt{2} \left(\frac{c}{n}\right) \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{-1/2} ,$$

pelo que o correspondente comprimento de onda, medido no meio com perdas, é

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{n} \left(\frac{c}{f}\right) \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{-1/2} ,$$

onde se fez

$$n = \sqrt{\varepsilon' \mu} .$$

No caso de o material não ser condutor (i.e., ser um dielétrico perfeito), vem $\sigma = 0$ e recupera-se o caso anterior, i.e., $\beta = nk_0$, $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ e $\alpha = 0$.

Porém, quando o material é *muito bom condutor*, i.e., quando se tem $\sigma \gg \omega\epsilon_0\epsilon$, então

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon}\right)^2} \pm 1 \approx \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon},$$

donde se infere que

$$\boxed{\sigma \gg \omega\epsilon_0\epsilon} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu\sigma}}.}$$

Isto significa que, neste caso, vem (com razoável aproximação)

$$\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \exp(i\beta\zeta) \exp(-\alpha\zeta) = \exp\left(i\frac{\zeta}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{\zeta}{\delta}\right).$$

No caso limite em que $\sigma \rightarrow \infty$ obtém-se $\delta \rightarrow 0$ e o campo electromagnético não penetra no condutor perfeito. Para um determinado valor de σ (considerado constante, i.e., independente da frequência) verifica-se que δ vai diminuindo à medida que a frequência aumenta: no limite em que $f \rightarrow \infty$ vem $\delta \rightarrow 0$, tal como no caso do condutor perfeito (i.e., com $\sigma = \infty$). Este efeito é conhecido, por razões óbvias, por *efeito pelicular*. Ao parâmetro δ , que tem unidades de comprimento, dá-se o nome de *profundidade de penetração*. Ainda de acordo com esta aproximação, podemos escrever

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta_0\eta} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) = \frac{\beta + i\alpha}{\omega\mu_0\mu} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) = \frac{1+i}{\delta} \frac{1}{\omega\mu_0\mu} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})$$

$$\therefore \eta = \mu \frac{k_0\delta}{1+i} \Rightarrow \eta = \eta' + i\eta'' = (\mu k_0\delta) \left(\frac{1-i}{2}\right)$$

$$\boxed{\eta' = \frac{\mu k_0\delta}{2}} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{\mu k_0\delta}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}. \\ \boxed{\eta'' = -\frac{\mu k_0\delta}{2}}$$

A impedância normalizada (em relação à impedância do vácuo) é complexa ($\eta \in \mathbb{C}$) e tem carácter indutivo. Note-se, por fim, que o comprimento de onda assume a forma

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta .$$

Vejam os outros casos limite. Quando um meio se comporta como um mau condutor (i.e., como um dieléctrico), tem-se $\sigma \ll \omega \varepsilon_0 \varepsilon$. Então, dado que

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad |x| \ll 1,$$

vem

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2,$$

donde se tira que

$$\left[\begin{aligned} \frac{\beta}{k_0} &\approx \sqrt{\varepsilon' \mu} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \right] \\ \frac{\alpha}{k_0} &\approx \frac{1}{2} \varepsilon'' \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \end{aligned} \right] .$$

Neste caso específico é, contudo, preferível utilizar as expressões do caso geral para efeitos de cálculo de (α, β) .

NOTAÇÃO – Utilizou-se, aqui, a constante de propagação (ou número de onda) $k = \beta + i\alpha$ em que β é a constante de fase e α a constante de atenuação. Tem-se $[\beta] = \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$ e $[\alpha] = \text{Np} \cdot \text{m}^{-1}$. Por vezes também se usa, na literatura, uma outra grandeza: $\gamma = \alpha - i\beta$. Portanto: $\gamma = -ik$. Por exemplo: numa onda que se propaga no sentido positivo do eixo z escreve-se $\exp(-\gamma z) = \exp(ikz) = \exp(-\alpha z) \exp(i\beta z)$.

A conservação da carga eléctrica é um facto científico bem estabelecido. Os nucleões – i.e., os prótons e os neutrões, que constituem o núcleo atómico, *não* são partículas elementares. Com efeito, os prótons e os neutrões são *hadrões* (partículas compostas por outras partículas – essas sim – elementares, designadas por *quarks*). Na realidade, os prótons e os neutrões são *hadrões* estáveis, conhecidos por *bariões* (i.e., *hadrões* constituídos por três *quarks*). Mas os electrões são, também, partículas elementares – são, na realidade, *leptões* que, em conjunto com os *quarks*, constituem as partículas elementares da matéria (designadas *fermiões elementares*). Em termos de QED (*quantum electrodynamics*), a interacção (ou força) electromagnética é transportada por partículas elementares (*bosões* elementares), designadas por *fotões*, e que – de acordo com a teoria da relatividade restrita de Einstein – têm *massa nula*. Com efeito, sendo $c = 299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a velocidade limite do universo, qualquer partícula que transporte energia (o *fotão* tem uma *energia intrínseca* dada, como se viu, por $\mathcal{E} = hf = \hbar\omega$), mas tenha uma massa própria $m = 0$, deverá deslocar-se sempre, em qualquer referencial de inércia, com uma velocidade $v = c$. Esta conclusão decorre imediatamente da fórmula relativista (ver figuras anexas das páginas seguintes)

$$\mathcal{E}^2 = (cp)^2 + \mathcal{E}_0^2, \quad \mathcal{E}_0 = mc^2.$$

Aqui \mathcal{E} representa a *energia total* de uma partícula – em contraste com \mathcal{E}_0 , a respectiva *energia intrínseca*. Como $\mathcal{E}_0 = mc^2$, uma partícula só tem energia intrínseca se a sua massa própria m não for nula (como é o caso dos *fotões*). Designou-se, ainda, o *momento linear* de uma partícula por p . Num certo referencial a *velocidade* v de uma partícula é dada por

$$v = \frac{d\mathcal{E}}{dp}.$$

Logo

$$\mathcal{E}^2 = (cp)^2 + \mathcal{E}_0^2 \Rightarrow 2\mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dp} = 2(cp)c \Rightarrow v = \frac{d\mathcal{E}}{dp} = \frac{c^2 p}{\mathcal{E}} \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{cp}{\mathcal{E}}$$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - (cp)^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}.$$

Mas, por outro lado, se uma partícula tem massa nula, da expressão geral da energia de uma partícula infere-se que

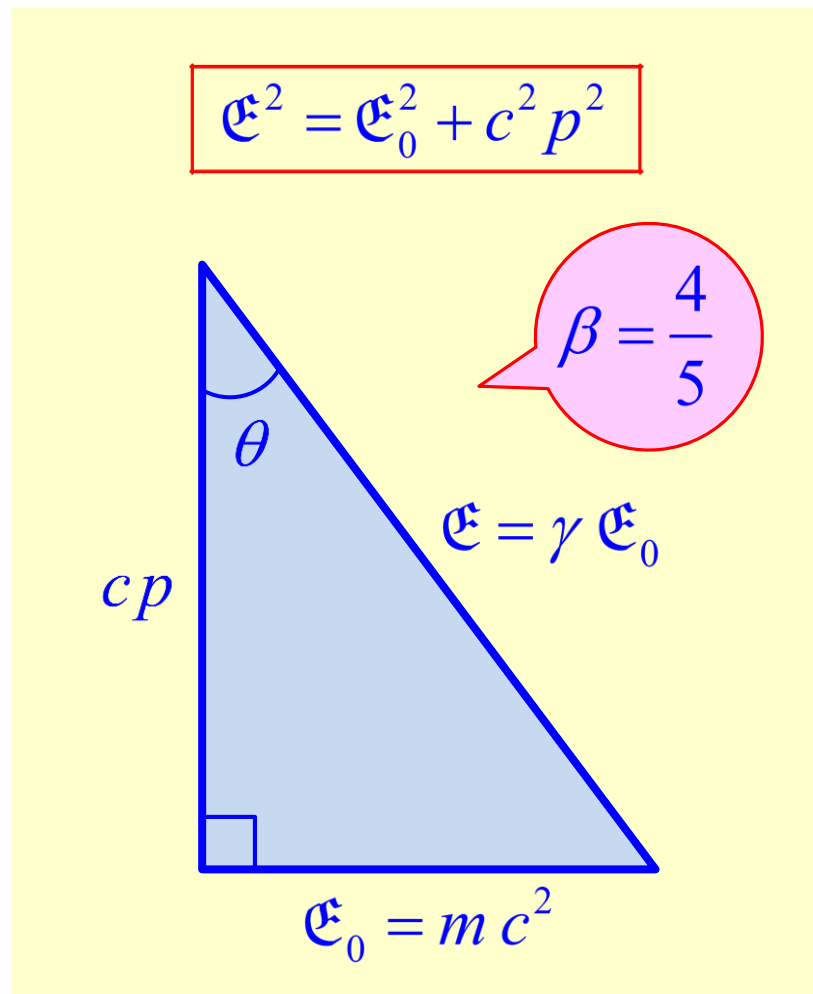
$$m = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = c p}.$$

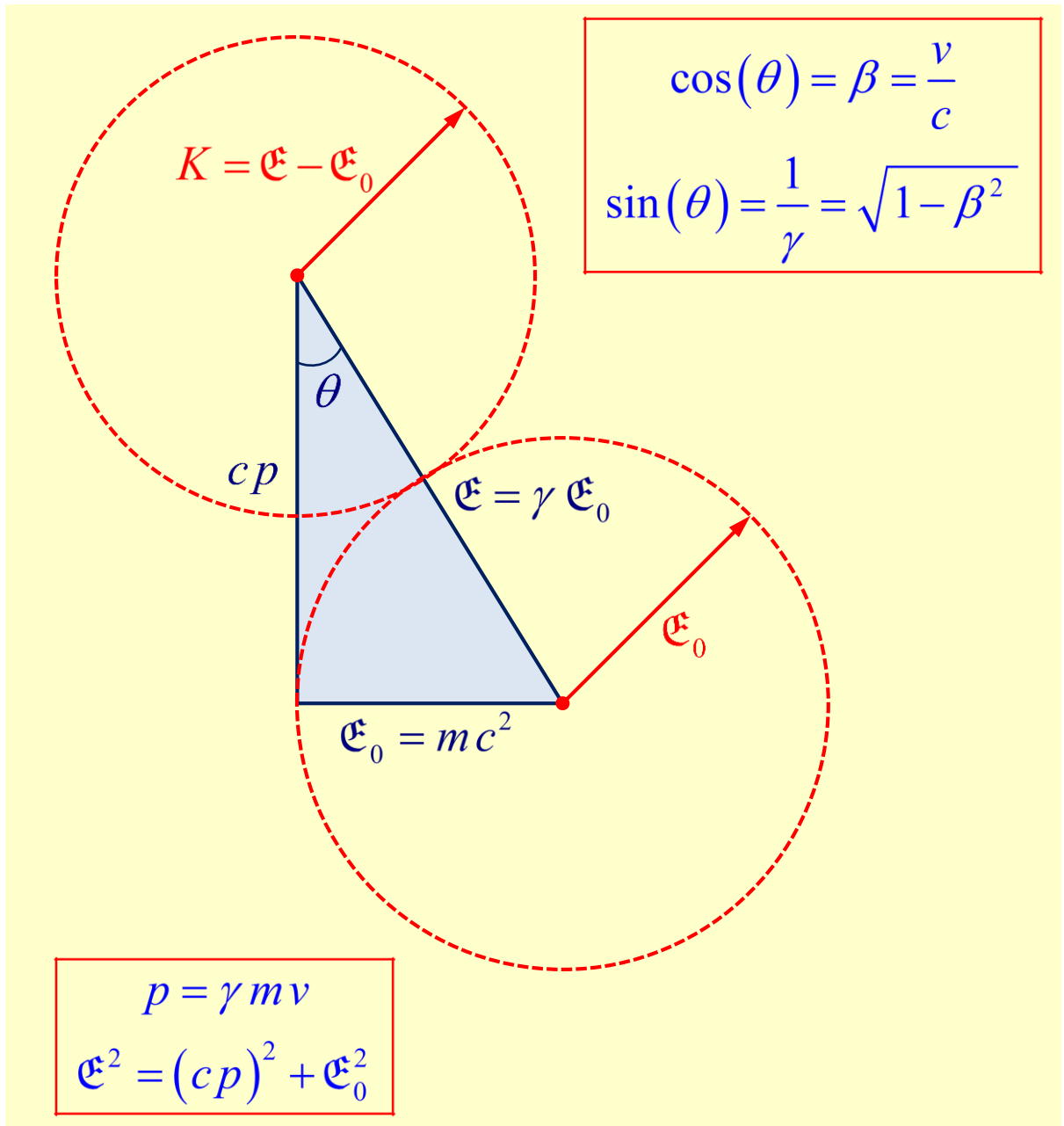
Logo, vem

$$\boxed{m=0} \Rightarrow \mathcal{E} = c p \Rightarrow \boxed{v = \frac{c^2 p}{\mathcal{E}} = c}.$$

No caso geral, tem-se:

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}} \mapsto \boxed{\beta = \frac{c p}{\mathcal{E}} = \cos(\theta)}.$$





Logo, no caso do fóton, é $\beta = 1$, donde

$$E = c p \Rightarrow \boxed{v = \frac{c^2 p}{E} = c} .$$

Reciprocamente: Como o fóton tem velocidade $v = c$, é necessariamente $\mathcal{E} = c p$, donde $\mathcal{E}_0 = 0$ e, consequentemente, $m = 0$.

Logo, para um fóton, tem-se

$$\mathcal{E} = h \omega = c p \Rightarrow \boxed{p = h \frac{\omega}{c}}.$$

Assim, como no caso do fóton se tem

$$\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c}},$$

tira-se, ainda, que

$$\boxed{p = \hbar k_0} \Rightarrow p = \left(\frac{h}{2\pi}\right) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Rightarrow \boxed{p = \frac{h}{\lambda}}.$$

Estas equações não devem ser consideradas estranhas em microfísica. De facto, uma partícula pode revelar-se, em certas circunstâncias, como *um corpúsculo* (com uma energia \mathcal{E} e um momento linear p) e, noutras circunstâncias, revelar-se como *uma onda* (com uma certa frequência f e um correspondente comprimento de onda λ). É nisto que consiste o chamado dualismo onda-corpúsculo de Louis de Broglie. No caso de uma partícula de massa $m \neq 0$, continua a considerar-se $\mathcal{E} = \hbar \omega$ mas, agora, também se faz $\mathcal{E}_0 = \hbar \omega_0$, com

$$\mathcal{E}_0 = \hbar \omega_0 = m c^2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{\hbar \omega_0}{c^2}}.$$

No caso do fóton, portanto, tem-se $\omega_0 = 0$. Daqui resulta que

$$\mathcal{E}^2 = (c p)^2 + \mathcal{E}_0^2 \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{c p}{\hbar}\right)^2 + \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{p = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}.$$

Então, a hipótese de Louis de Broglie, mais tarde confirmada experimentalmente, estabelece que

$$\boxed{p = \hbar k} \Rightarrow p = \left(\frac{h}{2\pi}\right) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Rightarrow \boxed{p = \frac{h}{\lambda}},$$

com

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c}}.$$

No caso do fóton é $m=0$, pelo que $\omega_0=0$ e, portanto, $k = \omega/c = k_0$. No caso geral, escreve-se

$$\mathfrak{E}^2 = (cp)^2 + \mathfrak{E}_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_0^2}.$$

Fazendo $k_0 = \omega_0/c$ e

$$\boxed{\kappa = \frac{\omega_0}{c} = \frac{mc}{\hbar}},$$

infere-se que

$$\boxed{k_0^2 = k^2 + \kappa^2} \Rightarrow \boxed{\frac{k_0^2}{\kappa^2} - \frac{k^2}{\kappa^2} = 1},$$

onde $k = k_0$ se (e só se) $\kappa = 0$ (i.e., quando $m = 0$). Esta última equação corresponde a uma hipérbole equilátera no plano (k, k_0) com assíntotas $k = \pm k_0$. Numa partícula de massa nula, então, $\omega_0 = 0$ e, daí, $\omega = ck$. Estas duas assíntotas correspondem, pois, ao caso em que a partícula é um fóton.

Como em mecânica relativista se tem

$$\mathfrak{E} = \gamma \mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{E}_0 = mc^2, \quad p = \gamma mv, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

resulta então que, quando $m \neq 0$,

$$p = \gamma mv = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\gamma mv} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Vejamus um exemplo numérico: para um electrão, cuja massa própria é $m = 9.10938291 \times 10^{-31}$ kg, virá (atendendo a que $h = 6.62606957 \times 10^{-34}$ J·s e $c = 299\,792\,458$ m·s⁻¹)

$$\left[\begin{array}{l} v = 10^{-5} c \Rightarrow \lambda = 0.2426 \mu\text{m}, \\ v = 0.5 c \Rightarrow \lambda = 4.2025 \text{ pm}, \\ v = 0.999 c \Rightarrow \lambda = 108.5894 \text{ fm}. \end{array} \right.$$

Uma unidade de energia, usada especialmente pelos físicos das partículas, é o eV (electrão-volt). Trata-se da energia adquirida, por um electrão, quando acelerado por uma diferença de potencial de $1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}$. Como a carga do electrão tem o valor (absoluto) $q = 1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{ C}$, obtém-se

$$\boxed{1 \text{ eV} = 1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{ J}}.$$

Vejam, então, qual a energia total $\mathfrak{E} = \gamma \mathfrak{E}_0 = \gamma m c^2$ de um electrão nos três casos anteriormente considerados.

$$\left[\begin{array}{l} v = 10^{-5} c \Rightarrow \mathfrak{E} = 0.5110 \text{ MeV}, \\ v = 0.5 c \Rightarrow \mathfrak{E} = 0.5901 \text{ MeV}, \\ v = 0.999 c \Rightarrow \mathfrak{E} = 0.0114 \text{ GeV}. \end{array} \right.$$

Na figura da página 43 existe um aspecto, ainda não mencionado, mas que também é digno de uma referência especial: sendo $\mathfrak{E} = \gamma m c^2$ a energia total de uma dada partícula e $\mathfrak{E}_0 = m c^2$ a sua energia intrínseca, a correspondente *energia cinética* K será, então,

$$\boxed{K = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = (\gamma - 1) \mathfrak{E}_0}.$$

No mesmo gráfico da página 43 a hipotenusa do triângulo rectângulo tem, portanto, um comprimento total $\mathfrak{E} = K + \mathfrak{E}_0$. Note-se que, no caso limite do fóton, é $\theta = 0$ (pois $\mathfrak{E}_0 = 0$) e, assim, $\mathfrak{E} = K = c p$.

Atendendo ao desenvolvimento binomial

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k} \right) = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{5}{16} \beta^6 + \frac{35}{128} \beta^8 + \dots$$

infere-se que, para $|\beta| \ll 1$, se tem

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right).$$

Logo, de acordo com esta aproximação, resulta

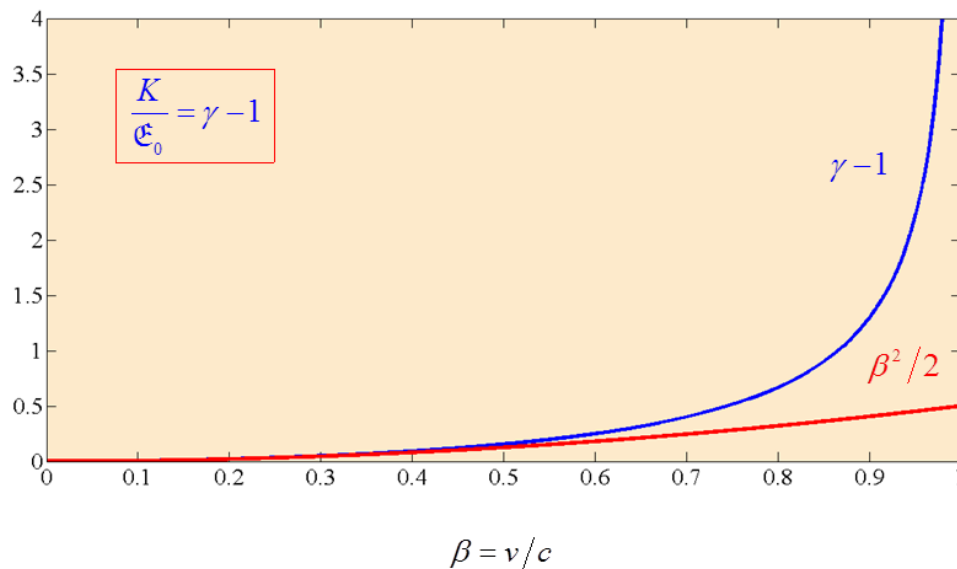
$$K \approx \frac{1}{2} m v^2,$$

que corresponde à conhecida expressão da energia cinética em *mecânica newtoniana*. Na figura seguinte compara-se o valor exacto de

$$\gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{5}{16} \beta^6 + \frac{35}{128} \beta^8 + \dots$$

com o primeiro termo «newtoniano» dado por $\beta^2/2$.

$$\gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{5}{16} \beta^6 + \frac{35}{128} \beta^8 + \dots$$



Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo

Numa onda monocromática *plana*, tem-se

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \right] \right\} \in \mathbb{R}^3,$$

em que $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$ é um vector complexo constante. Sendo $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ o vector de onda, a onda é – além disso – uniforme. Então, definindo uma distância

$$\zeta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = r \cos(\theta) \in \mathbb{R} \quad \left[r = |\mathbf{r}|, \quad \theta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \right]$$

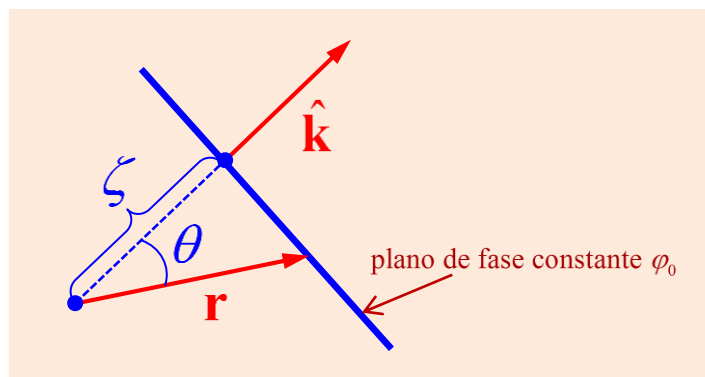
em que $\hat{\mathbf{k}}$ é o vector unitário correspondente a \mathbf{k} , com

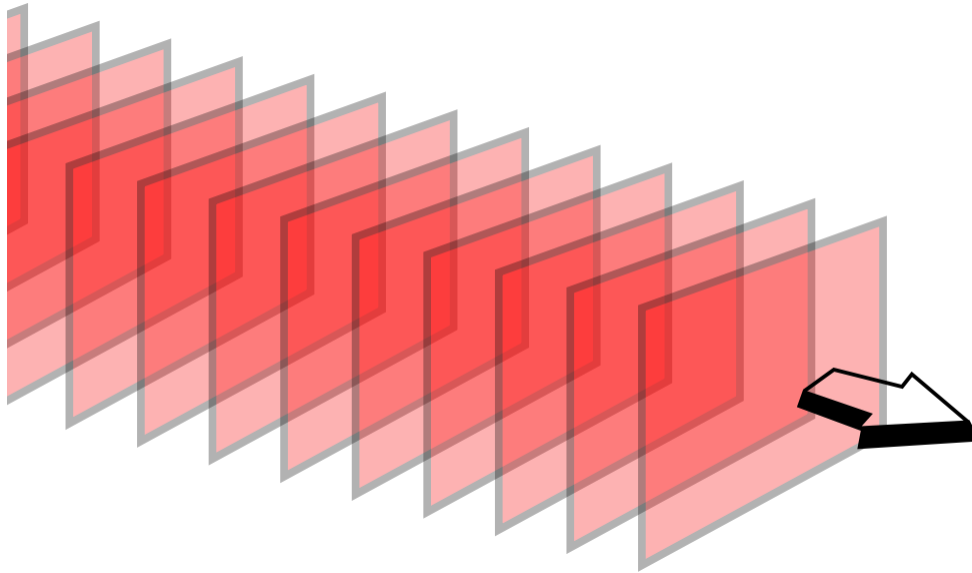
$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}} = \frac{\mathbf{k}}{k},$$

a *velocidade de fase* (*phase velocity*), v_p , da onda é tal que (ver figuras anexas)

$$\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \varphi_0 \Rightarrow \varphi = k(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}) - \omega t = \varphi_0 \Rightarrow \varphi = k\zeta - \omega t = \varphi_0$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k \frac{d\zeta}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \boxed{v_p = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\omega}{k}}.$$





A direcção da velocidade de fase é, naturalmente, a mesma de \mathbf{k} . Assim, vem

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}}.$$

Num meio (sem perdas), em que $\omega = 2\pi f$ e $k = 2\pi/\lambda$, tem-se

$$v_p = \lambda f \quad \left[n = \sqrt{\epsilon \mu} \right],$$

onde

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0} \frac{k_0}{k} \Rightarrow v_p = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{c}{n} = \lambda f.$$

Em conclusão: Só no caso do vácuo, em que $n = 1$, é que se pode escrever

$$\text{vácuo} \mapsto c = \lambda f.$$

Suponhamos, agora, que temos um campo eléctrico que é a sobreposição de duas ondas planas e monocromáticas, i.e., em que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[i (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t) \right] \right\} + \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[i (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t) \right] \right\}.$$

Note-se que as duas ondas têm a mesma amplitude e polarização (i.e., são caracterizadas pelo mesmo vector complexo $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$). Ou seja, tem-se

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \Psi(\zeta, t) \right\}, \quad \Psi(\zeta, t) = \exp \left[i (k_1 \zeta - \omega_1 t) \right] + \exp \left[i (k_2 \zeta - \omega_2 t) \right].$$

Note-se, com efeito, que se $\mathbf{k}_1 = k_1 \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}_2 = k_2 \hat{\mathbf{k}}$ e $\zeta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}$, então

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + K & \omega_1 = \omega_0 + \Omega \\ k_2 = k_0 - K & \omega_2 = \omega_0 - \Omega \end{cases}$$

donde se tira que

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta, t) &= \exp \left[i (k_0 \zeta - \omega_0 t) \right] \left\{ \exp \left[i (K \zeta - \Omega t) \right] + \exp \left[-i (K \zeta - \Omega t) \right] \right\} \\ &= 2 \exp \left[i (k_0 \zeta - \omega_0 t) \right] \cos(K \zeta - \Omega t) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{E}(\zeta, t) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \Psi(\zeta, t) \right\} = \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[i (k_0 \zeta - \omega_0 t) \right] \cos(K \zeta - \Omega t) \right\}.$$

Admitamos, então, que a polarização corresponde ao caso geral, i.e., que se tem

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2 \in \mathbb{C}^3, \quad \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Nestas condições, vem

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}(\zeta, t) = \Re \left\{ (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) \left[\cos(k_0 \zeta - \omega_0 t) \cos(K \zeta - \Omega t) + i \sin(k_0 \zeta - \omega_0 t) \cos(K \zeta - \Omega t) \right] \right\} \right. \\ \left. = \mathbf{E}_1 \cos(k_0 \zeta - \omega_0 t) \cos(K \zeta - \Omega t) - \mathbf{E}_2 \sin(k_0 \zeta - \omega_0 t) \cos(K \zeta - \Omega t) \right. \end{aligned}$$

de modo que, assim, se obtêm duas ondas: uma polarizada linearmente segundo \mathbf{E}_1 e a outra polarizada linearmente segundo \mathbf{E}_2 . Como não estamos interessados em estudar a onda resultante, analisaremos – apenas – o que se passa com cada uma destas ondas elementares.

Consideremos, então, as ondas elementares

$$\begin{cases} \mathbf{E}_A(\zeta, t) = \mathbf{E}_1 \cos(k_0 \zeta - \omega_0 t) \cos(K \zeta - \Omega t) \\ \mathbf{E}_B(\zeta, t) = \mathbf{E}_2 \sin(k_0 \zeta - \omega_0 t) \cos(K \zeta - \Omega t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E}(\zeta, t) = \mathbf{E}_A(\zeta, t) - \mathbf{E}_B(\zeta, t)}.$$

Note-se, desde já, que a diferença entre as duas ondas elementares tem – apenas – a ver com uma questão de fase relativa, a saber:

$$\mathbf{E}_B(\zeta, t) = \mathbf{E}_2 \cos\left[\frac{\pi}{2} - (k_0 \zeta - \omega_0 t)\right] \cos(K \zeta - \Omega t).$$

Ou seja: nada existe, do ponto de vista do comportamento qualitativo, que possa distinguir a onda elementar $\mathbf{E}_A(\zeta, t)$ da onda elementar $\mathbf{E}_B(\zeta, t)$. Por essa razão, centremos a nossa atenção sobre a onda elementar $\mathbf{E}_A(\zeta, t)$.

$$\mathbf{E}_A(\zeta, t) = \mathbf{E}_1 \cos(k_0 \zeta - \omega_0 t) \cos(K \zeta - \Omega t).$$

Suponhamos, então, que se verifica a seguinte situação:

$$\Omega \ll \omega_0.$$

Assim, a onda elementar $\mathbf{E}_A(\zeta, t)$ representa, essencialmente, uma onda que oscila rapidamente (no tempo) com uma frequência (angular) ω_0 tendo, no entanto, uma amplitude que oscila lentamente (no tempo) com uma frequência (angular) Ω . Ou seja: podemos considerar que a onda elementar $\mathbf{E}_A(\zeta, t)$ tem uma *portadora* que oscila com (a frequência) ω_0 e uma *envolvente* que oscila com (a frequência) Ω .

$$\left[\begin{array}{ll} \text{portadora} & \mapsto \cos(k_0 \zeta - \omega_0 t) \\ \text{envolvente} & \mapsto \cos(K \zeta - \Omega t) \end{array} \right.$$

A velocidade da portadora designa-se por *velocidade de fase* v_p . A velocidade da envolvente, por sua vez, designa-se por *velocidade de grupo* v_g .

$$k_0 \zeta - \omega_0 t = \varphi_0 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{k_0} (\varphi_0 + \omega_0 t) \Rightarrow v_p = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}$$

$$K \zeta - \Omega t = \Phi_0 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{K} (\Phi_0 + \Omega t) \Rightarrow v_g = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\Omega}{K}$$

Podemos, portanto, escrever

$$\mathbf{E}_A(\zeta, t) = \mathbf{E}_1 \cos\left[\omega_0 \left(t - \frac{\zeta}{v_p}\right)\right] \cos\left[\Omega \left(t - \frac{\zeta}{v_g}\right)\right].$$

Assim, e.g., façamos $t = 0$. Resulta, então,

$$\mathbf{E}_A(\zeta, 0) = \mathbf{E}_1 \cos\left(\frac{\omega_0 \zeta}{v_p}\right) \cos\left(\frac{\Omega \zeta}{v_g}\right) = \mathbf{E}_1 \cos(k_0 \zeta) \cos(K \zeta),$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \frac{\omega_0}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \\ K = \frac{\Omega}{v_g} = \frac{2\pi}{\Lambda} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda = \frac{2\pi v_p}{\omega_0} \\ \Lambda = \frac{2\pi v_g}{\Omega} \end{array}} .$$

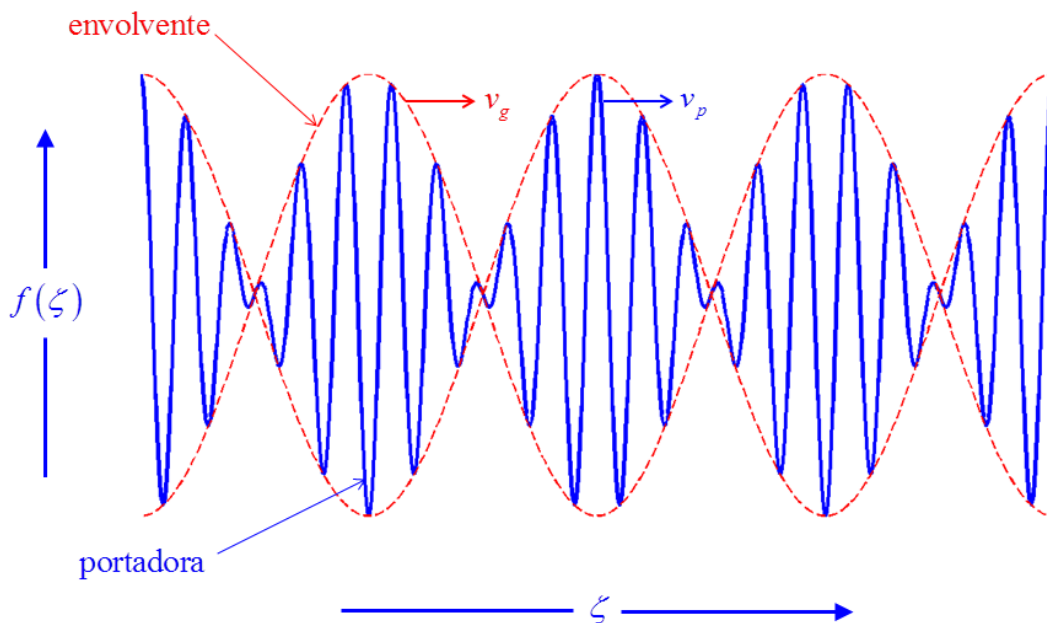
Se a velocidade de fase e a velocidade de grupo forem da mesma ordem de grandeza, infere-se – tendo em consideração que $\omega_0 \gg \Omega$ – que deverá ter-se, simultaneamente, $\lambda \ll \Lambda$.

Na figura anexa da página seguinte representa-se graficamente a função $f(\zeta)$ tal que

$$\mathbf{E}_A(\zeta, 0) = \mathbf{E}_1 f(\zeta), \quad f(\zeta) = \cos(k_0 \zeta) \cos(K \zeta) = \cos\left(2\pi \frac{\zeta}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi \frac{\zeta}{\Lambda}\right).$$

Considera-se que $\Lambda = 10 \lambda$. A figura é independente dos valores de v_p e v_g . Se as ondas elementares se propagarem no ar, então não existe dispersão e, conseqüentemente, $v_p = v_g = c$. Num meio dispersivo é, por definição, $v_p \neq v_g$.

Velocidade de fase e velocidade de grupo



Como Ω é o desvio de frequência $\Delta\omega$ em relação à frequência ω_0 da portadora e K o desvio Δk em relação à constante de fase k_0 da portadora, podemos escrever

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{1}{\Delta k / \Delta\omega}.$$

No limite em que $\Delta\omega \rightarrow 0$, obtém-se então

$$v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}.$$

No caso do vácuo é $k = k_0 = \omega/c$ e, conseqüentemente, $dk/d\omega = 1/c$, pelo que $v_g = c$.

Um condensador... não é um condensador!

“We have gotten the following interesting result: If we go high enough in frequency, the electric field at the center of our condenser will be one way and the electric field near the edge will point in the opposite direction.”

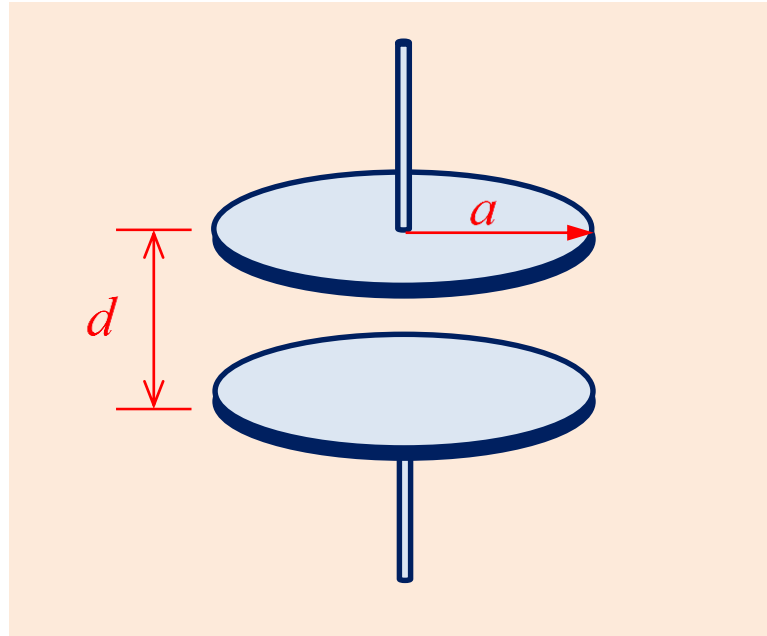
Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics – Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter* (The NEW MILLENNIUM Edition, page 23-6). New York, NY: Perseus/Basic Books, 2010.

Toda a teoria (canónica) dos circuitos assenta sobre uma aproximação fundamental – a de que se está a trabalhar em regime quase-estacionário, em que as leis KVL (*Kirchhoff's voltage law*) e KCL (*Kirchhoff's current law*) são válidas. Acontece, porém, que tal não é rigoroso: à medida que a frequência aumenta, isso é cada vez menos verdadeiro. Por exemplo: em microondas e em fotónica não existem objectos que possam ser, fisicamente, identificados como resistências, condensadores ou bobinas. Podemos, apenas, utilizar (por vezes) esquemas equivalentes que utilizam – mas apenas enquanto dispositivos formais – esses conceitos. Mas, sublinhe-se, tais dispositivos formais *não correspondem* a quaisquer entidades físicas que se podem caracterizar como resistências, condensadores ou bobinas.

Nesta adenda vai-se mostrar o caso de um condensador que – à medida que a frequência aumenta – se comporta cada vez menos como... condensador. Ou seja: o objecto físico que, em teoria dos circuitos, se designa como condensador, perde esse estatuto à medida que a frequência aumenta. É nesse contexto que se deve entender a citação anterior de Feynman (nas suas célebres *The Feynman Lectures on Physics*). Em tudo o que se segue admite-se que se está a estudar um condensador de armaduras circulares – tal como se indica na figura da página seguinte.

Em termos da teoria dos circuitos, podemos definir uma tensão eléctrica $U(t)$ entre as armaduras (ou pratos) do condensador, que se relaciona com a corrente eléctrica $I(t)$, que circula nos condutores ligados a cada uma das armaduras, como segue:

$$I(t) = C \frac{dU}{dt}.$$



Em regime estacionário, a anterior equação é rigorosa. Nomeadamente, podemos definir a capacidade C do condensador, como

$$C = \frac{Q(t)}{U(t)} = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{d},$$

onde se admitiu que o dielétrico (entre as armaduras) é o ar (com $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$) e que cada armadura tem uma área $A = \pi a^2$. Tudo isto está de acordo com a existência – em que se desprezam, sempre, os efeitos dos bordos – de um campo eléctrico uniforme, tal que

$$\mathbf{E}_\omega(t) = \mathbf{e}_z \Re\{E_0 \exp(-i\omega t)\} = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z.$$

Note-se que se está a admitir que existe um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , em que os condutores rectilíneos, ligados às armaduras, coincidem com o eixo Z . Cada armadura encontra-se, portanto, em planos paralelos ao plano XY , que se encontra localizado a meia distância $d/2$ de cada uma das duas armaduras. Consideremos, ainda, que se tem (o campo eléctrico está orientado de baixo para cima enquanto que a tensão é aplicada de cima para baixo)

$$E_0 = -\frac{U_0}{d},$$

de tal forma que

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \Rightarrow I(t) = C \frac{dU}{dt} = -\omega C U_0 \sin(\omega t) = \omega C E_0 d \sin(\omega t).$$

Obviamente que, como é sobejamente conhecido, é $I(t) = 0$ para $\omega = 0$ (abstraindo do regime transitório, de carga). Note-se que, de acordo com a corrente de deslocamento (de Maxwell), se tem (entre as armaduras)

$$\nabla \times \mathbf{B}_\omega = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t}.$$

Logo, para campos monocromáticos,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \}, \\ \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \}, \end{cases}$$

vem, então, atendendo à simétrica cilíndrica do problema,

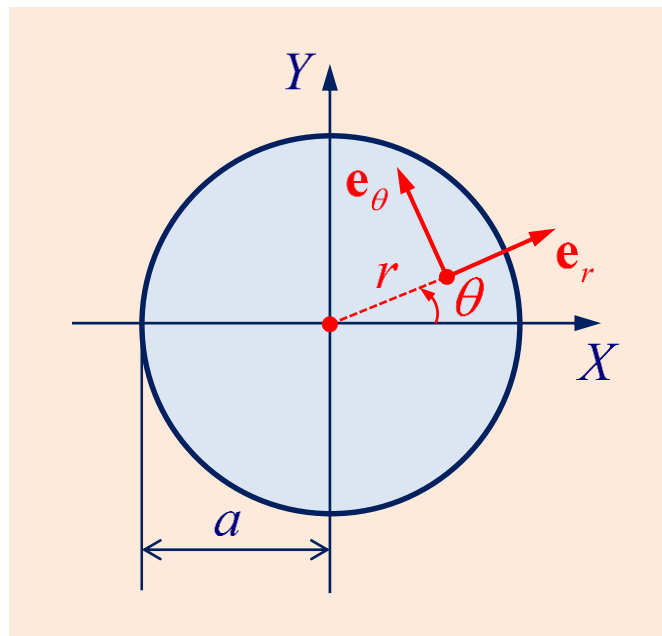
$$\mathbf{E} = E_0 \exp(-i\omega t) \mathbf{e}_z, \quad E_0 = -\frac{U_0}{d},$$

e, ainda,

$$\mathbf{B} = B_0 \exp(-i\omega t) \mathbf{e}_\theta.$$

Note-se que os eixos são tais que (ver figura anexa)

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z.$$



Com efeito (ver apêndice sobre coordenadas cilíndricas),

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin(\theta) \mathbf{e}_1 + \cos(\theta) \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = [\cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2] \times [-\sin(\theta) \mathbf{e}_1 + \cos(\theta) \mathbf{e}_2] \\ = \cos^2(\theta) \mathbf{e}_3 + \sin^2(\theta) \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z. \end{cases}$$

Logo, em termos de vectores complexos, a equação de Maxwell-Faraday escreve-se

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}.$$

A equação de Maxwell-Ampère, por sua vez, escreve-se

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \omega \mathbf{B}.$$

Em coordenadas cilíndricas, tendo em consideração que

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{B} = B \mathbf{e}_\theta, \end{cases}$$

tem-se

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{dB}{dr} \mathbf{e}_\theta, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB) \mathbf{e}_z = \left(\frac{dB}{dr} + \frac{B}{r} \right) \mathbf{e}_z.$$

Logo,

$$\begin{cases} \frac{dE}{dr} = -i \omega B \\ \frac{dB}{dr} = -\frac{B}{r} - i \frac{\omega}{c^2} E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 E}{dr^2} = -i \omega \frac{dB}{dr} \\ \frac{d^2 B}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dB}{dr} + \frac{1}{r^2} B - i \frac{\omega}{c^2} \frac{dE}{dr} \end{cases}$$

pelo que

$$\boxed{B = i \frac{1}{\omega} \frac{dE}{dr}},$$

e, conseqüentemente, obtêm-se as seguintes *equações de Helmholtz*:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \\ \frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) B = 0 \end{cases}}.$$

Assim, em particular, vem (na aproximação quase-estacionária, em que E é uniforme)

$$E = E_0 \Rightarrow B = 0.$$

No entanto, se se aplicar o teorema de Stokes, resulta

$$(2\pi r) B_0 = \oint_{S_r} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = \int_{S_r} [(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_z] d\sigma = -i \frac{\omega}{c^2} E_0 (\pi r^2)$$

$$\therefore \boxed{B_0 = -i \frac{\omega r}{2c^2} E_0}.$$

Introduzamos, agora, a constante de propagação no vácuo

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \boxed{\omega = ck_0}.$$

Nestas condições, infere-se que

$$B_0 = -i \frac{k_0 r}{2c} E_0 \Rightarrow \boxed{B_0 = -i \frac{\zeta}{2c} E_0},$$

desde que se introduza a variável *adimensional*

$$\boxed{\zeta = k_0 r}.$$

Mas então,

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\zeta}{dr} \frac{d}{d\zeta} = k_0 \frac{d}{d\zeta} \Rightarrow \frac{d^2}{dr^2} = k_0 \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{d\zeta} \right) = k_0 \left(k_0 \frac{d}{d\zeta} \right) \left(\frac{d}{d\zeta} \right) = k_0^2 \frac{d^2}{d\zeta^2}.$$

Assim, as equações de Helmholtz também se escrevem na forma alternativa

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta^2 \frac{d^2 E}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dE}{d\zeta} + \zeta^2 E &= 0 \\ \zeta^2 \frac{d^2 B}{dr^2} + \zeta \frac{dB}{dr} + (\zeta^2 - 1) B &= 0 \end{aligned}}.$$

Notemos, agora, que a equação de Bessel

$$\boxed{\zeta^2 J_n''(\zeta) + \zeta J_n'(\zeta) + (\zeta^2 - n^2) J_n(\zeta) = 0}$$

tem, como solução, a função de Bessel (de primeira espécie e ordem n) designada por $J_n(\zeta)$. Esta função admite o seguinte desenvolvimento em série:

$$J_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n)!} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2m+n}.$$

Em particular, tem-se

$$\begin{cases} J_0(\zeta) = 1 - \frac{\zeta^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{\zeta^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{\zeta^6}{2^6 (3!)^2} + \dots, \\ J_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^3}{2^3 1!2!} + \frac{\zeta^5}{2^5 2!3!} - \frac{\zeta^7}{2^7 3!4!} + \dots. \end{cases}$$

Na figura anexa da página seguinte mostram-se os gráficos destas duas funções. Podemos, deste modo, concluir o seguinte:

$$\begin{cases} E(\zeta) = E_0 J_0(\zeta) \\ B(\zeta) = -i \frac{E_0}{c} J_1(\zeta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(r) = E_0 J_0(k_0 r) \\ B(r) = -i \frac{E_0}{c} J_1(k_0 r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(r) = -\frac{U_0}{d} J_0(k_0 r) \\ B(r) = i \frac{U_0}{cd} J_1(k_0 r) \end{cases}.$$

Em particular, se se retiver – apenas – o primeiro termo dos respectivos desenvolvimentos em série, recuperam-se as expressões ($k_0 r \ll 1$):

$$\begin{cases} E(r) \approx -\frac{U_0}{d} = E_0, \\ B(r) \approx i \frac{k_0 r}{2} \frac{U_0}{cd} = -i \frac{k_0 r}{2c} E_0 = -i \frac{\zeta}{2c} E_0 = B_0. \end{cases}$$

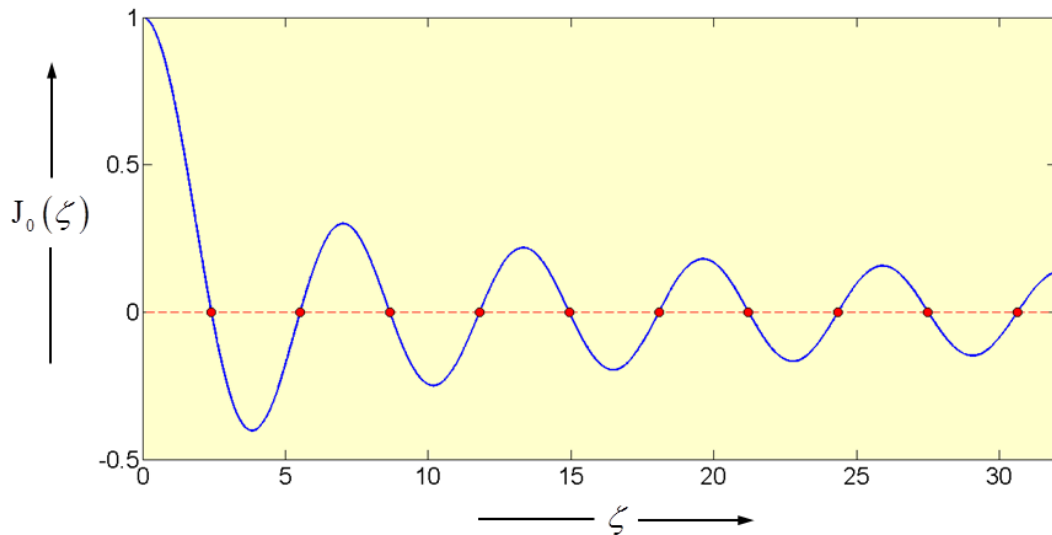
A variação, no domínio do tempo, será portanto (no caso geral)

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\omega(r, t) = \mathbf{e}_z \Re\{E(r) \exp(-i\omega t)\} \\ \mathbf{B}_\omega(r, t) = \mathbf{e}_\theta \Re\{B(r) \exp(-i\omega t)\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_\omega(r, t) = -\frac{U_0}{d} J_0(k_0 r) \cos(\omega t) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B}_\omega(r, t) = -\frac{U_0}{cd} J_1(k_0 r) \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta \end{cases}.$$

Em regime estacionário, em que $\omega = 0$, é $k_0 = 0$ e, daí, confirma-se – uma vez que $J_0(0) = 1$ e $J_1(0) = 0$ – que, efectivamente,

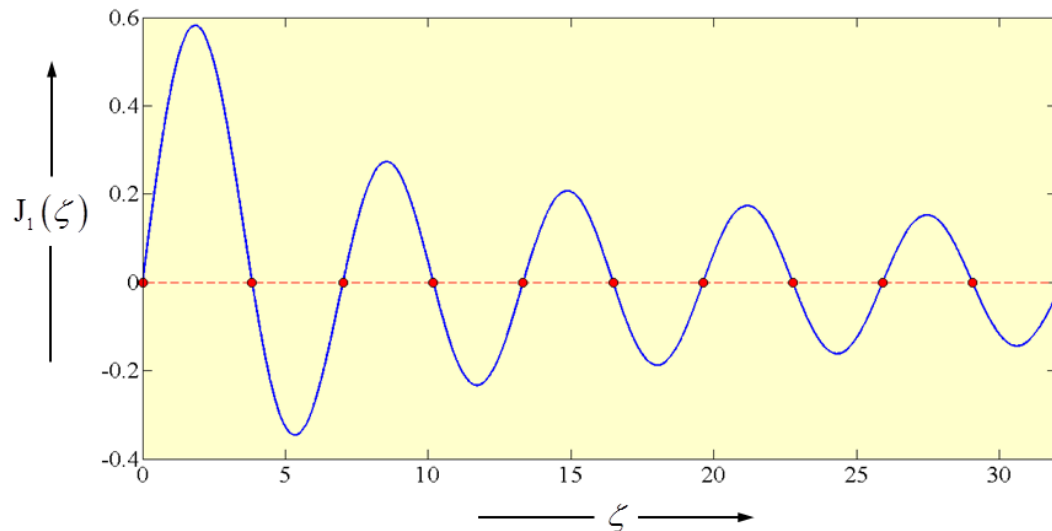
$$\boxed{\omega = 0} \mapsto \begin{cases} \mathbf{E}_\omega(r, t) = E_0 \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{B}_\omega(r, t) = 0. \end{cases}$$

Função de Bessel $J_0(\zeta)$



$$\begin{aligned} \zeta_0^{(1)} &= 2.4048 & \zeta_0^{(2)} &= 5.5201 & \zeta_0^{(3)} &= 8.6537 & \zeta_0^{(4)} &= 11.7915 & \zeta_0^{(5)} &= 14.9309 \\ \zeta_0^{(6)} &= 18.0711 & \zeta_0^{(7)} &= 21.2116 & \zeta_0^{(8)} &= 24.3525 & \zeta_0^{(9)} &= 27.4935 & \zeta_0^{(10)} &= 30.6346 \end{aligned}$$

Função de Bessel $J_1(\zeta)$



$$\begin{aligned} \zeta_1^{(1)} &= 3.8317 & \zeta_1^{(2)} &= 7.0156 & \zeta_1^{(3)} &= 10.1735 & \zeta_1^{(4)} &= 13.3237 & \zeta_1^{(5)} &= 16.4706 \\ \zeta_1^{(6)} &= 19.6159 & \zeta_1^{(7)} &= 22.7601 & \zeta_1^{(8)} &= 25.9037 & \zeta_1^{(9)} &= 29.0468 & \zeta_1^{(10)} &= 32.1897 \end{aligned}$$

À medida que a frequência aumenta vão sendo necessários, no entanto, mais termos do desenvolvimento em série das funções de Bessel. Por exemplo, quando

$$k_0 a = \frac{\omega a}{c} = \zeta_0^{(1)} = 2.40482555769577\dots,$$

o campo eléctrico é nulo para $r = a$. Neste caso, é possível fechar – numa cavidade cilíndrica de paredes condutoras perfeitas – o condensador. Obtém-se, então, uma cavidade ressonante. A primeira frequência de ressonância, f_0 , será dada por

$$f_0 = \frac{c \zeta_0^{(1)}}{2\pi a}.$$

Por exemplo: (i) para $a = 25$ cm, obtém-se $f_0 = 458.97011$ MHz; (ii) para $a = 38.1$ mm, obtém-se $f_0 = 3.01161$ GHz; (iii) para $a = 1$ mm, obtém-se $f_0 = 0.11474$ THz.

Em conclusão: A característica tensão/corrente

$$I(t) = C \frac{dU}{dt}$$

que, como se disse – no início desta discussão – caracteriza (i.e., *define*) um condensador, só é válida (em *rigor*) quando o campo eléctrico for *uniforme* (i.e., independente de r). Caso contrário, não será possível ter um campo eléctrico conservativo: a tensão $U(t)$ depende do raio r (com $0 \leq r \leq a$) em que esta for calculada. Ou seja: no caso geral, em especial quando não se verifique a aproximação $k_0 a \ll 1$, a citada característica tensão/corrente deixa de ser razoável. Uma lição fundamental do electromagnetismo é, pois, a seguinte: a teoria dos circuitos só é uma boa aproximação da realidade em frequências baixas: em microondas e, por maioria de razão, em fotónica, há que recorrer às equações de Maxwell – caso se pretenda uma análise correcta da realidade electromagnética.

Vector de Poynting e Vector de Poynting Complexo

Em ondas planas e monocromáticas é importante estabelecer a relação entre o vector de Poynting (instantâneo) e o vector de Poynting complexo. Sejam, então,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \}, \\ \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \}. \end{cases}$$

Define-se o vector de Poynting (instantâneo) como sendo o vector real

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t).$$

Vejamos, agora, o seguinte. Sendo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^3$, prova-se que:

$$\Re\{ \mathbf{A} \} \times \Re\{ \mathbf{B} \} = \frac{1}{2} \Re\{ \mathbf{A} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \}.$$

Demonstração

Comecemos por notar que se tem

$$\Re\{ \mathbf{A} \} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*), \quad \Re\{ \mathbf{B} \} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*).$$

Logo, vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \Re\{ \mathbf{A} \} \times \Re\{ \mathbf{B} \} &= \frac{1}{4} [(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*) \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)] \\ &= \frac{1}{4} [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{A}^* \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A}^* \times \mathbf{B}^*)] \\ &= \frac{1}{2} \Re\{ \mathbf{A} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \} \end{aligned}$$

QED

Façamos, então,

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t).$$

Apliquemos, agora, o resultado que se acaba de demonstrar. Obtém-se, assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t) \\ &= \Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\} \times \Re\{\mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\} \\ &= \Re\{\mathbf{A}\} \times \Re\{\mathbf{B}\} = \frac{1}{2} \Re\{\mathbf{A} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{A} \times \mathbf{B}\} \\ &= \frac{1}{2} \Re\{[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] + [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \exp(-2i\omega t)\}. \end{aligned}$$

Logo, definindo o vector de Poynting complexo

$$\mathbf{S}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}),$$

é possível reescrever a expressão do vector de Poynting (instantâneo) na forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{S}_c(\mathbf{r})\} + \frac{1}{2} \Re\{[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \exp(-2i\omega t)\}.$$

Calculemos, agora, o valor médio (no tempo) de $\exp(-2i\omega t)$. Vem

$$\langle \exp(-2i\omega t) \rangle = \langle \cos(2\omega t) - i \sin(2\omega t) \rangle = \langle \cos(2\omega t) \rangle - i \langle \sin(2\omega t) \rangle.$$

Porém, tem-se

$$\langle \cos(2\omega t) \rangle = \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0.$$

Daqui infere-se, portanto, que

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \Re\{\mathbf{S}_c(\mathbf{r})\}.$$

Em síntese:

$$\begin{cases} \text{vector de Poynting instantâneo} & \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t), \\ \text{vector de Poynting complexo} & \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}). \end{cases}$$

Consideremos o caso de uma onda plana e monocromática que seja *uniforme*:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \\ \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \end{cases} \quad \left[\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \right].$$

Neste caso, tem-se simplesmente

$$\mathbf{S}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \quad \mapsto \quad \boxed{\mathbf{S}_c \text{ não depende da posição } \mathbf{r}}.$$

Porém, das equações de Maxwell, obtém-se então

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\eta_0 \eta} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0), \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} > 0,$$

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* = \frac{1}{\eta_0 \eta} [\mathbf{E}_0 \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0^*)] = \frac{1}{\eta_0 \eta} [\mathbf{E}_0 \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0^*)] = \frac{1}{\eta_0 \eta} [(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{E}_0^*].$$

Logo, como também se tem (neste caso)

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_0 = 0,$$

infere-se que

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* = \frac{1}{\eta_0 \eta} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \hat{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\eta_0 \eta} \hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{S}_c = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\eta_0 \eta} \hat{\mathbf{k}}}.$$

Mas então,

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \Re \{ \mathbf{S}_c(\mathbf{r}) \} = \mathbf{S}_c = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\eta_0 \eta} \hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\mathbf{k}} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\eta_0 \eta} > 0}.$$

Conclusão

O valor médio (no tempo) do vector de Poynting (instantâneo) é a parte real do vector de Poynting complexo. O vector de Poynting (instantâneo) é um vector real (representável por uma seta). O vector de Poynting complexo é um vector complexo (e, portanto, não é representável por uma seta no caso geral). Porém, numa onda plana e monocromática uniforme, o vector de Poynting complexo reduz-se a um simples vector real (i.e., a uma seta). Neste caso, então, o valor médio (no tempo) do vector de Poynting (instantâneo) é um vector uniforme, i.e., representa-se pela mesma seta (paralela ao vector de onda \mathbf{k}) em todos os pontos do espaço. Num meio com perdas este resultado deixa de ser aplicável: o fluxo de potência vai depender do ponto considerado.

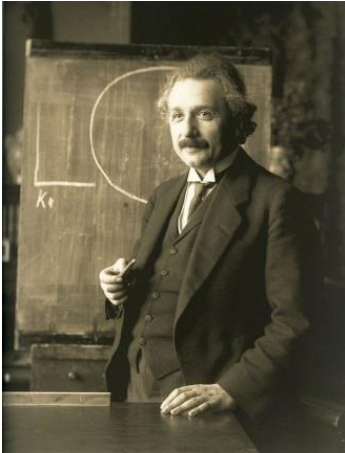
Da Óptica Geométrica à Óptica Quântica

A *electrodinâmica clássica* é o protótipo de uma teoria científica moderna. Embora o seu nascimento formal, enquanto *edifício físico-matemático*, esteja intimamente associado às *equações de Maxwell*, outros cientistas (antes de Maxwell) tiveram um contributo decisivo – nomeadamente, o físico experimental Michael Faraday.



James Clerk Maxwell (1831 – 1879)

Este físico-matemático escocês é, provavelmente, com Sir Isaac Newton (1642 – 1726) e Albert Einstein (1879 – 1955), um dos três maiores físicos de todos os tempos. As suas célebres equações (hoje conhecidas universalmente por *equações de Maxwell*) aparecem totalmente desenvolvidas no seu livro *A Treatise on Electricity and Magnetism* (publicado, pela primeira vez, em 1873). Note-se, contudo, que Maxwell utilizou a linguagem matemática dos quaterniões de Hamilton, tendo escrito as suas equações na forma de equações diferenciais escalares às derivadas parciais. Foi Oliver Heaviside (1850 – 1925) quem, mais tarde, reduziu as 20 equações em 20 variáveis de Maxwell à forma vectorial de 4 equações em 4 variáveis ($\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \rho$), através – nomeadamente – dos operadores vectoriais *rotacional* e *divergência*. Na verdade, o conceito de vector – embora implícito no tratado de Maxwell – teve um nascimento acidentado. A sua origem deve-se ao estudo dos *quaterniões* desenvolvido por Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865). No entanto, o nascimento do conceito de vector resulta de outras e variadas contribuições – de Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877) a Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903), passando por William Kingdon Clifford (1845 – 1879) e pelo já citado Oliver Heaviside. Com Maxwell aparece a primeira teoria matemática de *unificação da física*: com a *electrodinâmica clássica* de Maxwell, a electricidade e o magnetismo unem-se numa única realidade – a do *campo electromagnético*, tendo a óptica – enquanto ciência da luz – sido, ainda por Maxwell, reduzida a uma mera manifestação do campo electromagnético.



Albert Einstein (1879 – 1955)

Este físico, de origem alemã (nasceu em Ulm, no reino de Württemberg pertencente ao império germânico), faleceu nos EUA (no hospital de Princeton, com 76 anos, de um aneurisma aórtico abdominal). Recebeu o prémio Nobel da física, em 1921, pelas suas contribuições em física teórica – nomeadamente, no estudo do efeito fotoelétrico. Registe-se, com ironia, que a academia sueca não referiu – explicitamente – as teorias da relatividade (restrita e geral), pelas quais Einstein é mais conhecido. Em 1940 Einstein tornou-se, oficialmente, um cidadão americano. Entre 1933 até à data da sua morte, trabalhou como investigador no *Institute for Advanced Study* em Princeton, New Jersey. A sua tese de doutoramento foi aprovada em 1905, pela Universidade de Zurique (desde 1901 que Einstein tinha a nacionalidade suíça). O seu trabalho científico é profundamente marcado por duas coisas: (i) a *teoria da relatividade restrita*, que formulou em 1905; (ii) a *teoria da relatividade geral*, que desenvolveu entre os anos de 1907 e 1915, e é – muito provavelmente – a sua maior contribuição no domínio da física teórica. Menos conhecida, pelo grande público, é a sua contribuição para a *mecânica quântica*. Não obstante, Einstein é um dos pais da teoria quântica. No entanto, divergiu do rumo tomado pela mecânica quântica e, mais tarde, foi um crítico acérrimo da chamada *interpretação de Copenhaga* da mecânica quântica – liderada por Niels Henrik David Bohr (1885 – 1862). Num célebre artigo, publicado por Einstein em 1935 em colaboração com Boris Podolsky e Nathan Rosen (dáí o artigo ser hoje conhecido por artigo EPR), Einstein levantava a seguinte questão: se a mecânica quântica estiver correcta, então é possível a chamada *spooky action at a distance*. Isto, porque – em mecânica quântica – existe um efeito novo e completamente contra-intuitivo designado por *entrelaçamento quântico* (*quantum entanglement*). Este efeito está na base da moderna *teoria quântica da informação*. Podemos dizer o seguinte: mesmo quando Einstein errou, fê-lo de forma tão clara e tão profunda que permitiu abrir novos horizontes na ciência e na técnica (de que o caso da teoria quântica da informação constitui um excelente exemplo). Mesmo os que estavam correctos, como Niels Bohr, nunca conseguiram o grau de clareza e de profundidade rigorosa, que foi sempre a marca do pensamento de Einstein. Neste sentido, o *erro quântico* de Einstein é mais fecundo do que toda a filosofia de Bohr sobre *complementaridade*.

Apresenta-se, a seguir, uma pequena lista de outros nomes relevantes da história do electromagnetismo.

Charles-Augustin de Coulomb (1736 – 1806)

James Watt (1736 – 1819)

Alessandro Volta (1745 – 1827)

André-Marie Ampère (1775 – 1836)

Hans Christian Oersted (1777 – 1851)

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Georg Simon Ohm (1789 – 1854)

Michael Faraday (1791 – 1867)

Joseph Henry (1797 – 1878)

Wilhelm Edward Weber (1804 – 1891)

James Prescott Joule (1818 – 1889)

William Thomson (Lord Kelvin) (1824 – 1907)

Nikola Tesla (1856 – 1943)

Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894)

Deve-se a **Michael Faraday** um dos maiores avanços *experimentais* do electromagnetismo. Apesar de ter obtido pouca instrução formal, Faraday foi dos cientistas que maior influência teve na evolução da ciência e da técnica do electromagnetismo. Com efeito, a ideia de *campo electromagnético* deve-se a Faraday. Sem este conceito de campo, a ideia da *interacção electromagnética à distância* parecia coisa deixada para o entretenimento ligado a demonstrações de «magia de salão». Com ele a electricidade – ou melhor, o electromagnetismo – iniciou uma ligação à tecnologia que não mais seria possível deter.

Foi **Heinrich Hertz** quem, pela primeira vez, provou experimentalmente que a teoria da luz, formulada teoricamente por Maxwell, estava correcta. Mais concretamente: entre 1886 e 1889, Hertz conduziu um conjunto de experiências que vieram provar a *existência de ondas electromagnéticas* – tal como previsto pelas equações de Maxwell. Deve-se, também, a Hertz a primeira demonstração experimental (1887) do *efeito fotoeléctrico* – mais tarde explicado por Einstein (em 1905). Desde 1930 que a *unidade de frequência* foi designada por *hertz* (Hz) para honrar a memória deste físico que morreu precocemente (com a idade de 36 anos) em 1894.

Mais tarde, **Guglielmo Marconi** (1874 – 1937) foi um engenheiro pioneiro na transmissão radioelétrica à distância. Em 1909 partilhou, com Karl Ferdinand Braun, o prémio Nobel da Física em virtude dos seus contributos para o avanço da telegrafia sem fios (*wireless telegraphy*).

A teoria (clássica) electromagnética da luz (i.e., a *electrodinâmica clássica*) viria a sofrer, mais tarde, uma evolução com o objectivo de a tornar compatível com a mecânica quântica, no âmbito da *teoria quântica do campo* ou QFT (*quantum field theory*), na forma específica que veio a ser conhecida por *electrodinâmica quântica* ou QED (*quantum electrodynamics*). A QED (note-se a «coincidência» que, no latim, existe com a frase *quod erat demonstrandum* com o mesmo acrónimo) daria origem ao prémio Nobel da física de 1965, atribuído aos seguintes três físicos: **Richard Feynman** (1918 – 1988), **Julian Schwinger** (1918 – 1994) e **Sin-Itiro Tomonoga** (1906 – 1979). O prémio Nobel só pode ser atribuído, no máximo, a três pessoas. Por essa razão, é (ainda hoje) muito discutida a ausência de **Freeman John Dyson** (n. 1923) na atribuição deste prémio.

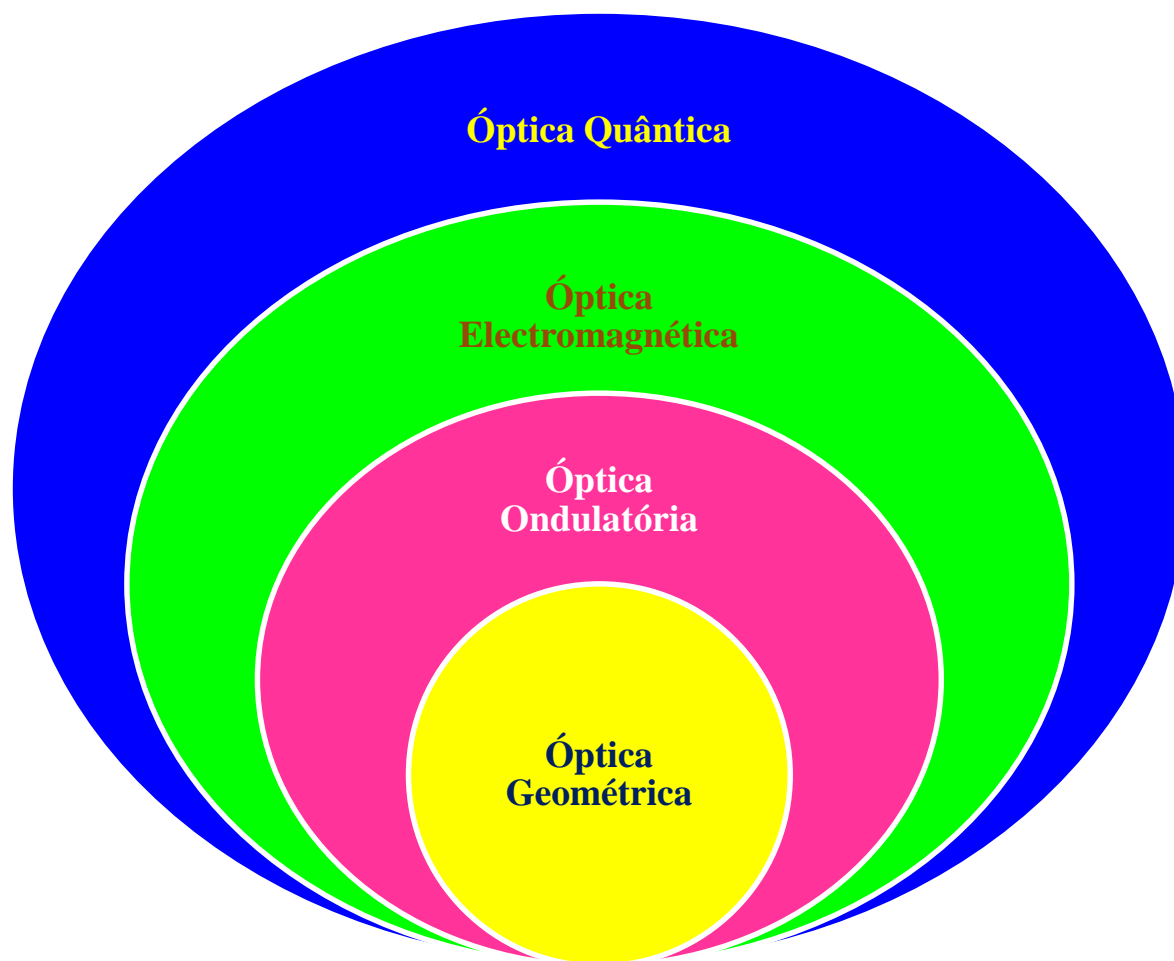
Em 1960 **Theodore Harold Maiman** (1927 – 2007) demonstrou, pela primeira vez, o funcionamento de um laser. Desde então, a óptica – que não vinha a participar, há muito tempo, da vanguarda do conhecimento científico, passou a partilhar as atenções da investigação em física. A óptica electromagnética (baseada nas equações de Maxwell) cedeu o lugar a uma teoria mais geral conhecida por *óptica quântica*. A designação *fotónica* é, actualmente, o nome preferido para designar a óptica – desde a óptica geométrica até à óptica quântica, passando pela óptica ondulatória e pela óptica electromagnética. O prémio Nobel da física de 2005 foi partilhado por Roy J. Glauber, John L. Hall e Theodor W. Hänsch, devido à contribuição destes físicos para a teoria quântica da coerência óptica. Também o prémio Nobel da física de 2012 foi partilhado por Serge Haroche e David J. Wineland, devido à contribuição destes dois físicos para os novos métodos experimentais revolucionários em que é possível, pela primeira vez, manipular sistemas quânticos individuais.



Richard Phillips Feynman (1918 – 1988)

Feynman foi um dos pioneiros da *electrodinâmica quântica*. Recebeu o prémio Nobel da física em 1965 (juntamente com Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga). É um dos cientistas mais notáveis da época pós-Einstein. A sua curiosidade científica expandiu-se por várias áreas do conhecimento. É um pioneiro da moderna teoria da *computação quântica* e da *nanotecnologia*. Sempre privilegiou o *insight* físico sobre a mera manipulação matemática. Mas, apesar disso, não deixou de inovar nos métodos matemáticos. Os diagramas de Feynman são um exemplo disso mesmo. A sua actividade pedagógica foi, também, notável. Deixou, também neste campo, uma obra inesquecível de que as suas *The Feynman Lectures on Physics* – destinadas a alunos que têm, ao nível universitário, um primeiro contacto com a física – são um exemplo, ainda hoje, notável por sublinhar a *compreensão* em relação à simples *manipulação mecânica de fórmulas*.

Na figura anexa apresenta-se um esquema que pode representar, com propriedade, o estado actual da fotónica – a versão contemporânea da óptica.



A **Óptica Geométrica** corresponde à versão mais simples da fotónica. A realidade electromagnética é, neste caso, representada por *raios ópticos* que observam um conjunto de regras geométricas simples. De acordo com o *princípio de Fermat*, um raio óptico, que liga os pontos **A** e **B**, segue a trajectória tal que o tempo de percurso, entre esses dois pontos, é um extremo (i.e., um máximo, um mínimo ou um ponto de inflexão). Frequentemente, porém, a (verdadeira) trajectória corresponde a um tempo de percurso mínimo. Daí, a formulação mais corrente (embora não seja universalmente válida) do princípio de Fermat: *os raios de luz seguem a trajectória correspondente ao tempo mínimo*.

A **Óptica Ondulatória** corresponde a uma versão mais geral do que a Óptica Geométrica. Nesta versão mais geral a luz é analisada no âmbito de uma *teoria ondulatória escalar*. Ou seja: a luz é, agora, tratada como um fenómeno ondulatório. Ignora-se, contudo, o carácter vectorial do campo electromagnético. A interferência e a difracção, e.g., são impossíveis de explicar no âmbito da Óptica

Geométrica, mas perfeitamente compreensíveis em termos da Óptica Ondulatória. Podemos dizer que, se λ é o comprimento de onda da luz (no âmbito da Óptica Ondulatória), então a Óptica Geométrica corresponde ao limite (da Óptica Ondulatória) quando se faz $\lambda \rightarrow 0$.

A **Óptica Electromagnética** corresponde à aplicação da *electrodinâmica clássica* à fotónica. Ou seja, é a teoria que – no âmbito da fotónica – utiliza as *equações de Maxwell*. Trata-se, portanto, de uma *teoria ondulatória vectorial*. Só no âmbito desta teoria é que é possível analisar os fenómenos associados à polarização das ondas electromagnéticas. Os meios anisotrópicos, e.g., dão origem a processos de birrefringência (ou dupla refração) que exigem o conceito de polarização e, portanto, não podem ser tratados em termos de Óptica Ondulatória.

A **Óptica Quântica** é, actualmente, a teoria mais geral da fotónica. Podemos, por essa razão, dizer que a fotónica se identifica com a Óptica Quântica. A Óptica Quântica consiste na aplicação da QED (*quantum electrodynamics*) ao domínio da óptica. Enquanto que a Óptica Electromagnética é uma *teoria clássica* – compatível com a *teoria da relatividade* – a Óptica Quântica é um ramo da *mecânica quântica* aplicado ao estudo do campo electromagnético no domínio óptico. Ou seja: o campo electromagnético deixa de poder ser tratado como um campo electromagnético contínuo, obedecendo às equações de Maxwell. Na Óptica Quântica o campo electromagnético é quantificado, i.e., passa a ser considerado como um conjunto de entidades *discretas* designadas por *fotões*. Os fotões são, simultaneamente, ondas e corpúsculos – para utilizar uma linguagem antropomórfica. Em certas experiências os fotões manifestam essencialmente características *ondulatórias*. Porém, noutra tipo de experiências, os fotões manifestam essencialmente características *corpúsculares*. Além disso, na Óptica Quântica é possível realizar experiências no âmbito da chamada *metafísica experimental* – i.e., experiências que, há algumas décadas, estavam associadas a questões consideradas exclusivamente do domínio estrito da *filosofia* e da *metafísica*. Por essa razão, Einstein dizia que certos aspectos do universo quântico (nomeadamente, os associados ao *entrelaçamento quântico*), a serem verdadeiros significavam uma espécie de *spooky action at a distance*, completamente contra-intuitivos e contrários a uma certa noção de *causalidade local*. A Óptica Quântica permite verificar *experimentalmente* que essa causalidade local não se verifica e, pelo contrário, a natureza parece obstinada em contrariar as chamadas *desigualdades de Bell*.

A citação que se segue, na próxima página, é de **Alain Aspect (n. 1947)**, retirada da sua introdução ao livro de **John Stuart Bell (1928 – 1990)**, ao tentar caracterizar o problema levantado pelo chamado *teorema de Bell*.

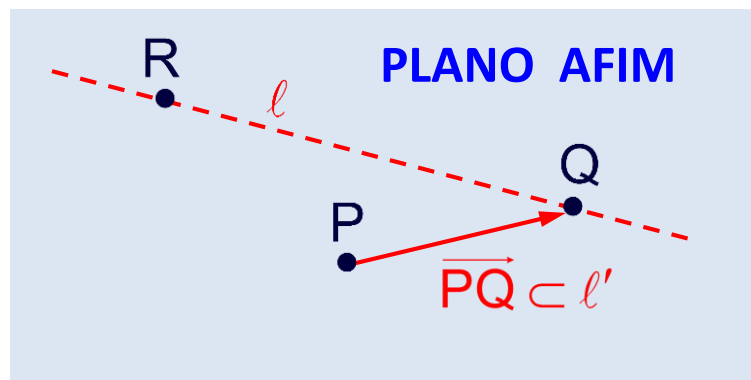
For instance, if we have a pair of identical twins we do not know what their blood type is before testing them, but if we determine the type of one, we know for sure that the other is the same type. We easily explain this by the fact that they were born with, and still carry along, the same specific chromosomes that determine their blood type. What Bell's paper shows us is that if we try to describe the correlations between the entangled particles in the way we understand the correlations between the twins, we will be making a serious error.

Alain Aspect, "Introduction: John Bell and the second quantum revolution", in pp. xxiii-xxiv: **J. S. Bell**, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics, Second Edition – With a new Introduction by Alain Aspect*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.

Vectores

Neste apêndice analisa-se, com algum pormenor, o conceito de *vector*. Existem, aparentemente, duas formas distintas de abordar este conceito: (i) como *segmento orientado*, na perspectiva de *espaço afim*; (ii) como entidade abstracta de um *espaço vectorial*, definido axiomáticamente sobre um *corpo de escalares* (frequentemente identificado com o corpo \mathbb{R} dos números reais), onde apenas de consideram duas operações – a adição entre vectores e a multiplicação de um escalar com um vector. A noção de *comprimento* de um vector, em geometria afim, só faz sentido ao longo de uma mesma linha. A comparação universal (i.e., estendida ao espaço total) da noção de comprimento ultrapassa a fronteira da geometria afim: só é possível comparar comprimentos ao longo de linhas não paralelas através da introdução de *noções métricas*, tais como a noção de ângulo e de ortogonalidade, fundadas numa definição de produto interno entre vectores – definição essa que sai fora da geometria afim. Note-se, além disso, que convém sublinhar o seguinte: o conceito euclidiano (hiperbólico, ou outro) de *métrica* (ou, se se preferir, de *produto interno* entre vectores) nasce com a definição de *espaço quadrático* que é uma estrutura algébrica que está para além da definição axiomática de espaço vectorial.

Comecemos por introduzir o conceito de espaço afim. Trata-se, muito simplesmente, de um *conjunto de pontos*. Neste conjunto não é introduzido qualquer ponto privilegiado que possa ser considerado como a origem do espaço. O conceito de *origem* é estranho ao espaço afim e só existe realmente num conceito diferente – o de espaço vectorial. Assim, num plano afim, existem apenas pontos e segmentos orientados. Um segmento orientado é definido como a diferença entre dois pontos. Não existe um vector nulo universal do espaço afim. Veja-se a figura junta.



Nesta figura da página anterior mostram-se, apenas, três pontos: P, Q, R . Existe uma linha recta ℓ que passa pelos pontos R e Q . Existe, ainda, um segmento orientado \overline{PQ} que liga o ponto P ao ponto Q e que pertence a uma linha recta ℓ' . É possível dizer que a linha recta ℓ' não é paralela à linha recta ℓ porque se encontram no ponto comum Q . É também possível escrever:

$$\boxed{Q = P + \overline{PQ} \Leftrightarrow \overline{PQ} = Q - P}.$$

Não é possível quantificar o ângulo entre as linhas rectas ℓ e ℓ' . A única coisa que se pode dizer de duas linhas é se elas são (ou não) paralelas entre si. Não o são neste caso concreto.

Uma noção diferente é – como se disse – a de espaço vectorial.

Comecemos, então, por estabelecer os axiomas que definem um *espaço vectorial* V sobre um corpo de *escalares* (que será, aqui, o corpo \mathbb{R} dos números reais). Aos elementos de V dá-se o nome de *vectores*. Designaremos os escalares (números reais) por letras gregas (e.g., λ e μ). Os vectores, por sua vez, são designados por letras a negrito (e.g., \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c}).

Para quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$, a adição entre vectores satisfaz o seguinte conjunto de axiomas:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	comutatividade
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	associatividade
$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	elemento neutro (vector nulo $\mathbf{0}$)
$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	inverso aditivo ($-\mathbf{a}$)

Para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, a multiplicação entre escalares e vectores satisfaz, por sua vez, os axiomas:

$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$	distributividade
$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$	distributividade
$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$	associatividade
$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$	elemento neutro (escalar unitário)

Um subconjunto $U \subset V$ diz-se um *subespaço* de V se for fechado em relação às duas operações (adição entre vectores e multiplicação por escalares):

$$\left[\begin{array}{ll} \mathbf{a} + \mathbf{b} \in U, & \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U, \\ \lambda \mathbf{a} \in U, & \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in U. \end{array} \right.$$

Uma aplicação $\mathcal{L}: U \rightarrow V: \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$, diz-se *linear* quando, para quaisquer $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{L}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \mathcal{L}(\mathbf{a}) + \mu \mathcal{L}(\mathbf{b})}.$$

Neste caso, $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{v} = \mathcal{L}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \in \mathbf{V}$. Uma aplicação linear $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ diz-se um *endomorfismo*. Uma aplicação linear invertível $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ diz-se um *isomorfismo* e escreve-se $\mathbf{U} \cong \mathbf{V}$.

Um vector $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ diz-se uma *combinação linear* de vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbf{V}$ quando existirem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

Um conjunto de vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbf{V}$ diz-se *linearmente independente* se não for possível escrever nenhum desses vectores como uma combinação linear dos restantes. Ou seja: esse conjunto é linearmente independente se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ for o único conjunto de escalares tais que

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Numa combinação linear de vectores

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \in \mathbf{V},$$

se os vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbf{V}$ constituírem um conjunto linearmente independente, então os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são únicos e chamam-se as *coordenadas* do vector \mathbf{b} . As combinações lineares de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathbf{V}$ geram um subespaço $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ que se designa por

$$\mathbf{U} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\},$$

e, então, diz-se que

$$k = \dim(\mathbf{U}).$$

Além disso, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ constitui uma *base* de \mathbf{U} . Note-se que

$$\mathbf{V} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \Rightarrow \dim(\mathbf{V}) = n \geq k.$$

Por exemplo: \mathbb{R}^2 é um subespaço de \mathbb{R}^3 ; tem-se $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. O corpo \mathbb{C} dos números complexos também pode, alternativamente, ser considerado como um subespaço de \mathbb{R}^3 e, neste caso, é isomorfo a \mathbb{R}^2 , i.e., $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ tendo-se, então, $\dim(\mathbb{C}) = 2$. Na verdade, este isomorfismo consiste em estabelecer o seguinte:

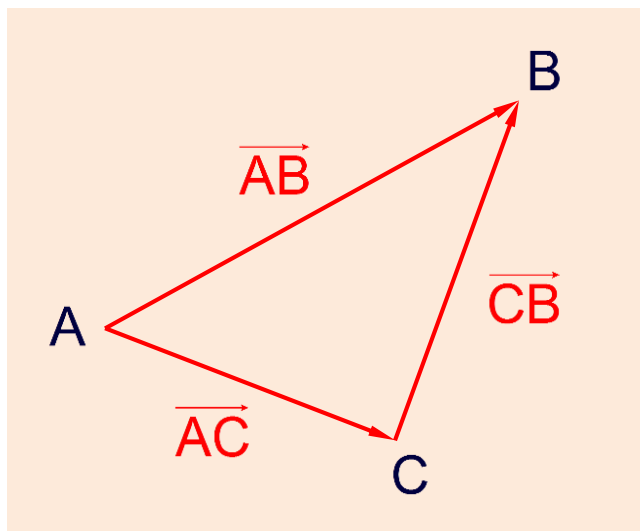
$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbf{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por exemplo: uma base de \mathbb{C} é o conjunto $\mathcal{B} = \{1, i\}$, em que

$$\mathbb{C} \text{œl} \leftrightarrow (1, 0) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{C} \text{œi} \leftrightarrow (0, 1) \in \mathbb{R}^2.$$

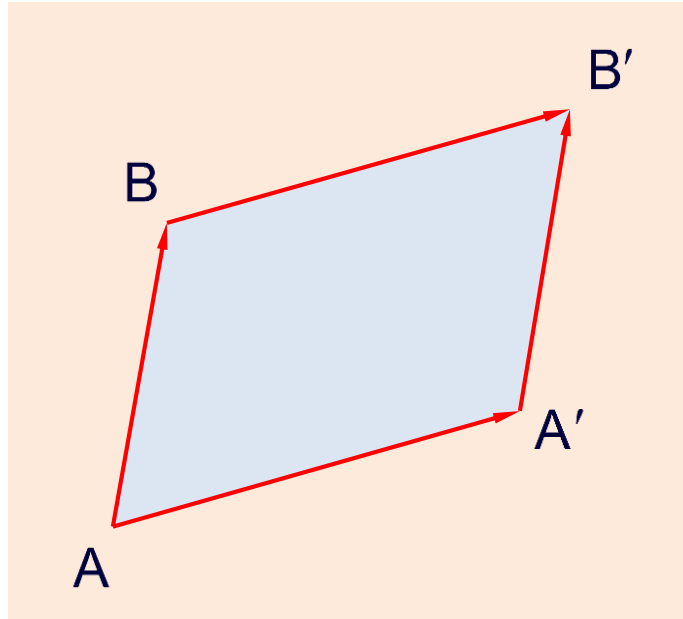
Voltemos, agora, ao conceito de espaço afim. Estamos em condições de estabelecer uma definição formal.

Definição – Um conjunto \mathcal{E} de pontos define uma estrutura de *espaço afim* se existe um espaço vectorial V e uma aplicação Θ que associa um vector \overrightarrow{PQ} a cada par ordenado (P, Q) de pontos de \mathcal{E} , i.e., tem-se $\Theta: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow V$ tal que $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$. Além disso, para cada ponto $P \in \mathcal{E}$, a aplicação $\Theta_P: Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ é uma aplicação bijectiva (i.e., uma aplicação injectiva e sobrejectiva) $\mathcal{E} \rightarrow V$. Dados três pontos A, B, C de \mathcal{E} tem-se a relação de Chasles (ver a figura seguinte) segundo a qual $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Diz-se, então, que o espaço vectorial é a *directão* do espaço afim \mathcal{E} . A dimensão de \mathcal{E} é a dimensão de V .



Note-se que, em consequência, tem-se $\overrightarrow{AA} = 0$ e $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Outra consequência é a *regra do paralelogramo* (ver figura na página seguinte):

regra do paralelogramo	\mapsto	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ \Leftrightarrow $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$
---------------------------	-----------	---



Esta regra do paralelogramo resulta imediatamente da relação de Chasles:

$$\overline{AB} = \overline{AA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'B} \Rightarrow \overline{AB} - \overline{A'B'} = \overline{AA'} - \overline{BB'} \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'}} \\ \updownarrow \\ \boxed{\overline{AA'} = \overline{BB'}} \end{array} .$$

Os pontos $A A' B' B$ formam, então, um paralelogramo.

Como num espaço afim não existe uma origem definida, tem-se (ver figura na página seguinte):

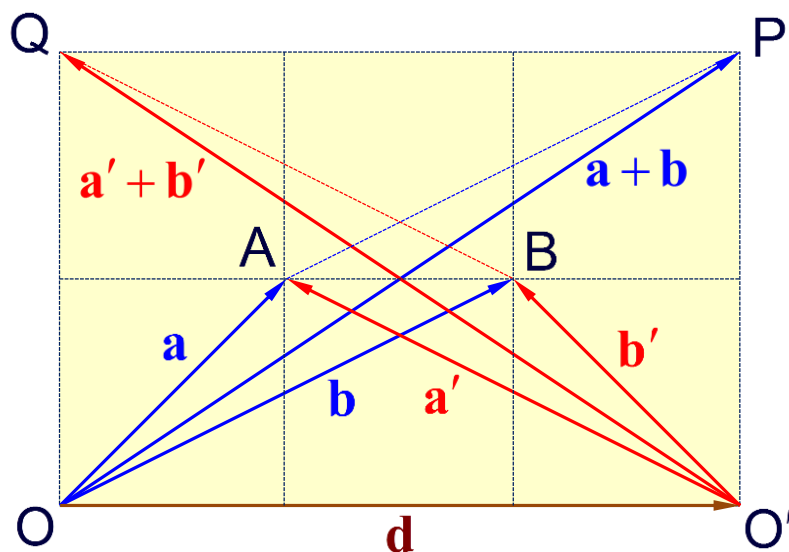
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{Alice} \equiv O(0,0) \mapsto \boxed{P = O + \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = A - O, \quad \mathbf{b} = B - O} \\ \mathbf{Bob} \equiv O'(3,0) \mapsto \boxed{Q = O' + \mathbf{a}' + \mathbf{b}', \quad \mathbf{a}' = A - O', \quad \mathbf{b}' = B - O'} \end{array} \right.$$

Do ponto de vista de **Alice** o que **Bob** fez foi (com $\mathbf{d} = \overline{OO'}$):

$$\mathbf{Alice} \mapsto \boxed{Q = O + \overline{OO'} + (\mathbf{a} - \mathbf{d}) + (\mathbf{b} - \mathbf{d})} .$$

Do ponto de vista de **Bob** o que **Alice** fez foi (com $\mathbf{d} = -\overline{O'O}$):

$$\mathbf{Bob} \mapsto \boxed{P = O' + \overline{O'O} + (\mathbf{a}' + \mathbf{d}) + (\mathbf{b}' + \mathbf{d})} .$$



Definição – Uma álgebra sobre o corpo \mathbb{F} é um espaço vectorial (ou linear) \mathcal{A} definido sobre o corpo \mathbb{F} em conjunto com uma função bilinear (i.e, linear em ambos os argumentos) $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $(a, b) \in \mathcal{A}^2 \mapsto ab \in \mathcal{A}$.

Um primeiro exemplo de uma álgebra é \mathbb{C} , entendido não como um corpo mas como o espaço linear (ou vectorial) \mathbb{R}^2 dos pares ordenados $z = (x, y)$ de números reais, tais que:

$$\begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{cases}.$$

A primeira propriedade corresponde à soma de complexos:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + i y_1 \\ z_2 = x_2 + i y_2 \end{cases} \mapsto z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

A segunda, que define o produto entre vectores da álgebra, corresponde a:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + i y_1 \\ z_2 = x_2 + i y_2 \end{cases} \mapsto z_1 z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Em particular, tem-se:

$$i^2 = (0,1)^2 = ii = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

A operação de *conjugação* corresponde a fazer

$$z = x + iy = (x, y) \mapsto z^* = x - iy = (x, -y).$$

Tem-se

$$zz^* = (x, y)(x, -y) = (x^2 + y^2, 0) = |z|^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Note-se que a álgebra \mathbb{C} , assim definida sobre o corpo \mathbb{R} , é *isomorfa* à álgebra das matrizes reais de 2×2 ou $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$, fazendo

$$\mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{R}), \quad z = a + ib \mapsto M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Por exemplo:

$$i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow i^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto -1.$$

Vamos, agora, introduzir o *produto interno* (ou escalar) entre vectores. Para facilitar a notação consideramos o espaço vectorial \mathbb{R}^2 dos vectores do plano euclidiano. No entanto, tudo o que se segue facilmente se generaliza para o espaço vectorial \mathbb{R}^3 do espaço euclidiano (tridimensional). Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ uma base ortonormada de \mathbb{R}^2 , i.e., tem-se

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2, \quad |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1.$$

Podemos considerar que \mathbf{e}_1 é o vector unitário que define o eixo X e que \mathbf{e}_2 é o vector unitário que define o eixo Y . Sejam, agora, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ tais que $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$. O produto interno é o número real:

em coordenadas	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
geometricamente	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos(\theta)$

Aqui, θ (com $0 \leq \theta \leq \pi$) é o ângulo entre os vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} , i.e., $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. A construção geométrica depende da introdução prévia de comprimentos e ângulos. Tem-se

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

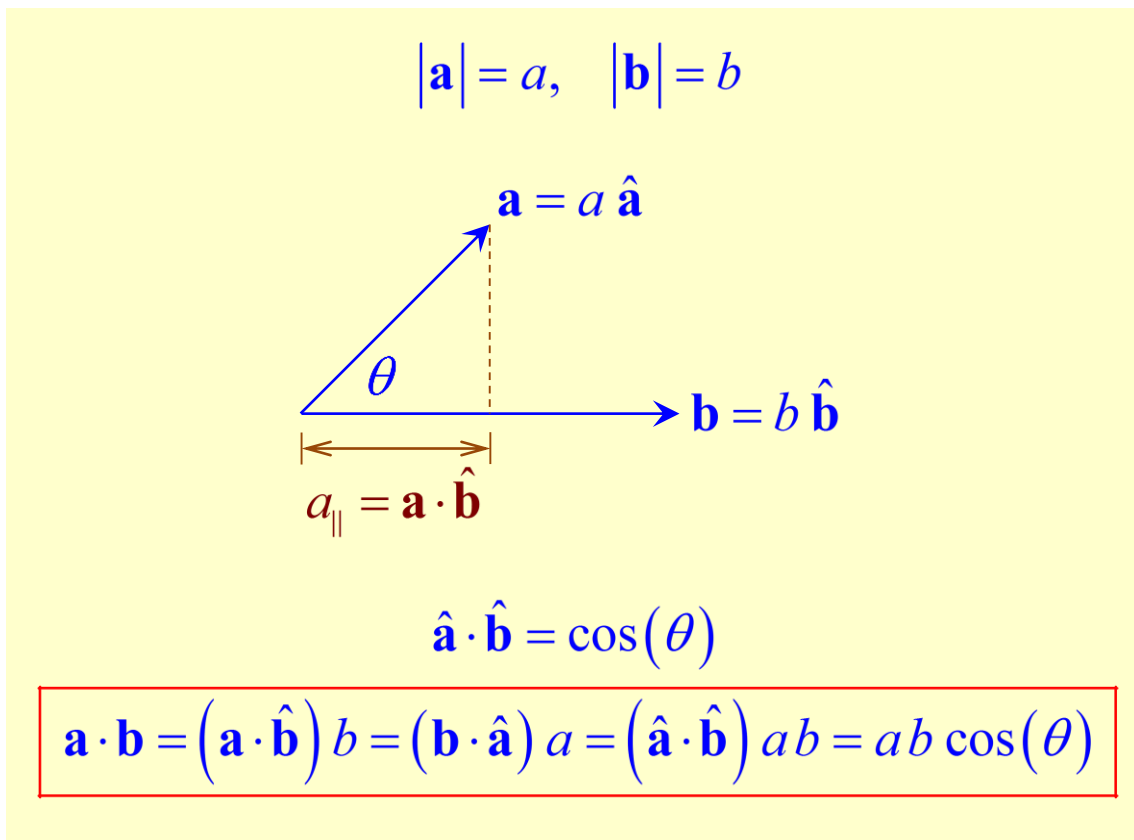
Por sua vez, é

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Dois vectores são *ortogonais* desde que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Um vector unitário tem comprimento unitário, i.e., $|\mathbf{a}| = 1$. O produto interno verifica as seguintes propriedades:

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$	linearidade
$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$	linearidade
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	simetria
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 > 0, \mathbf{a} \neq 0$	definido positivo

Na figura seguinte representa-se graficamente o produto interno entre vectores.



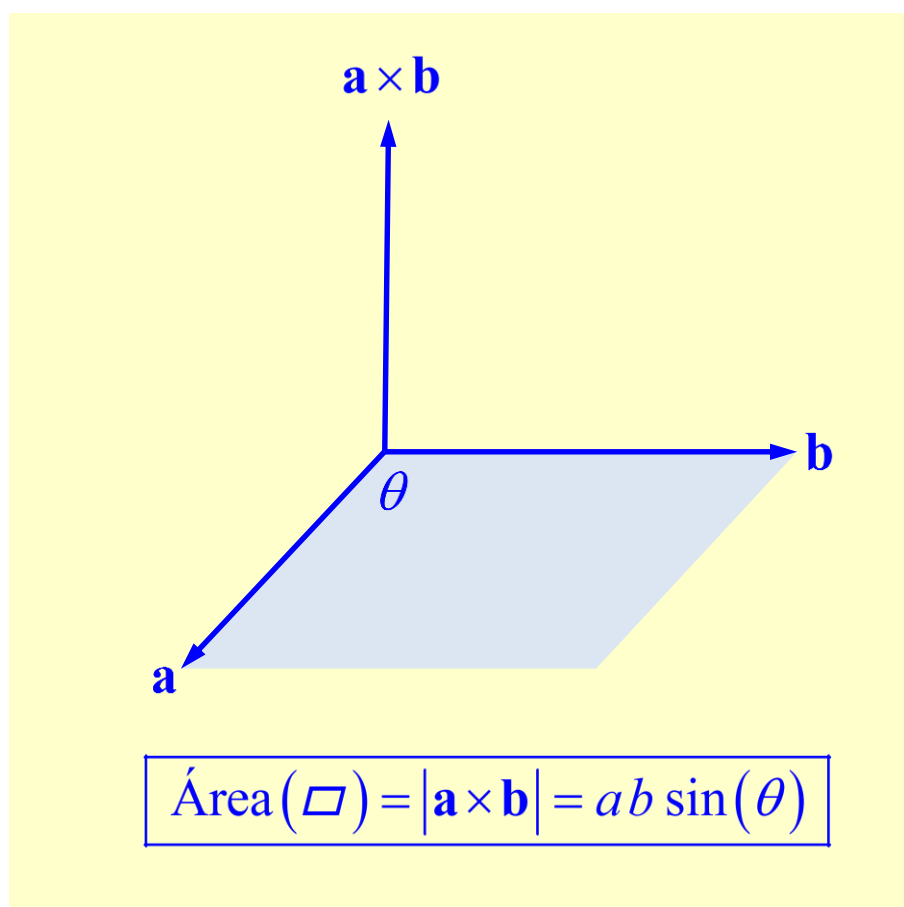
Os vectores unitários são representados com acento circunflexo («chapéu»).

Além do produto interno, existe um outro produto fundamental entre dois vectores: o produto externo (ou vectorial) de Gibbs. Existem duas importantes diferenças em relação ao produto interno: (i) o resultado do produto externo é um vector (o resultado do produto interno é um escalar); (ii) o produto externo é anti-simétrico (o produto interno é simétrico).

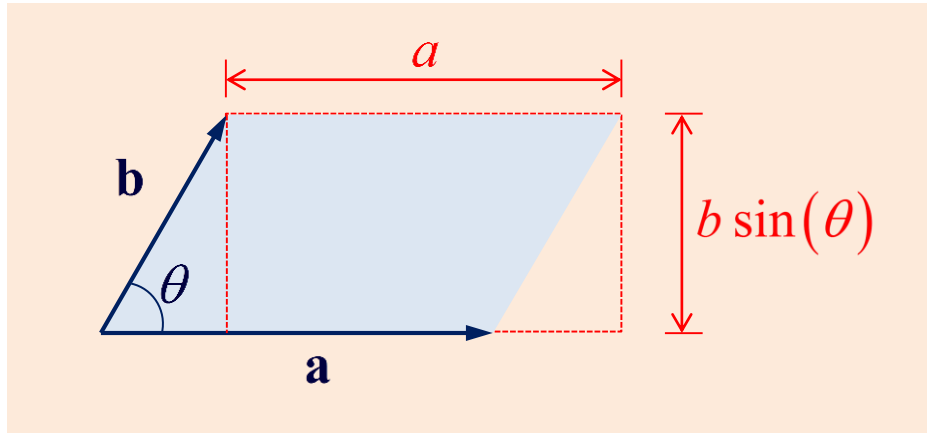
Sejam, então, dois vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Define-se um novo vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, denominado *produto externo* dos dois vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} , que observa as seguintes propriedades:

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$	ortogonalidade
$ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \sin(\theta)$	comprimento igual à área
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$	orientação (triedro direito)

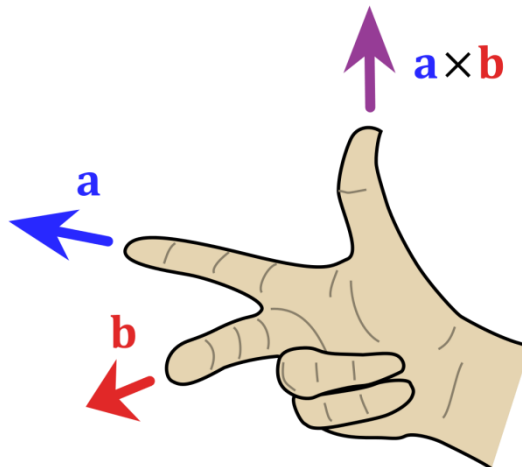
Ou seja: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é um vector ortogonal quer a \mathbf{a} quer a \mathbf{b} ; o comprimento $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ é igual à área do paralelogramo formado por (\mathbf{a}, \mathbf{b}) ; o triedro formado pelo terno ordenado $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ é direito (ou dextrorso). Na figura seguinte ilustra-se esta definição.



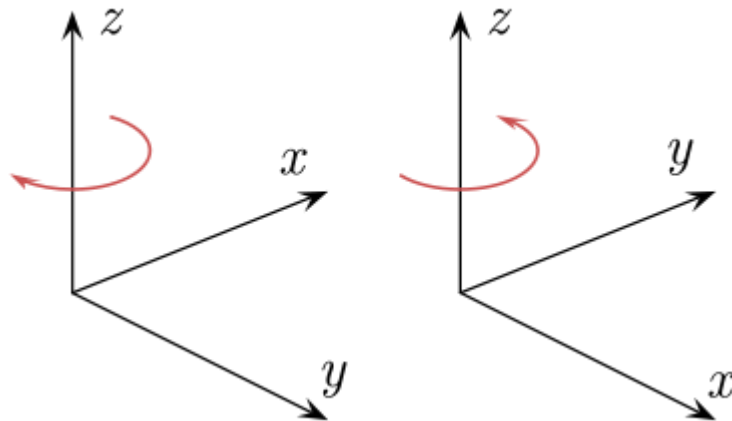
Facilmente se mostra que, sendo $a = |\mathbf{a}|$ e $b = |\mathbf{b}|$, o comprimento $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\theta)$ corresponde à área do paralelogramo formado por (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . A figura anexa mostra que, de facto, assim é.



Obviamente que, quando $\theta = 0$, o paralelogramo colapsa, i.e., $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Note-se que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ quando $\theta = \pi/2$. O sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é definido pela regra da mão direita – como se indica na figura seguinte.



Nas duas figuras seguintes mostra-se: (i) a orientação esquerda (sinistrorsa) do lado esquerdo: (ii) a orientação direita (dextrorsa) do lado direito.



Uma consequência fundamental desta definição é a seguinte:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \text{anti-simetria} .$$

Nomeadamente, quando $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ (os vectores são paralelos para $\lambda > 0$ e anti-paralelos para $\lambda < 0$), vem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{a}) = -(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{a} \Rightarrow 2\lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{a}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = 0} ,$$

confirmando-se, portanto, que o produto externo de dois vectores paralelos (ou anti-paralelos) é o vector nulo (com efeito, $\theta = 0$ para vectores paralelos e $\theta = \pi$ para vectores anti-paralelos).

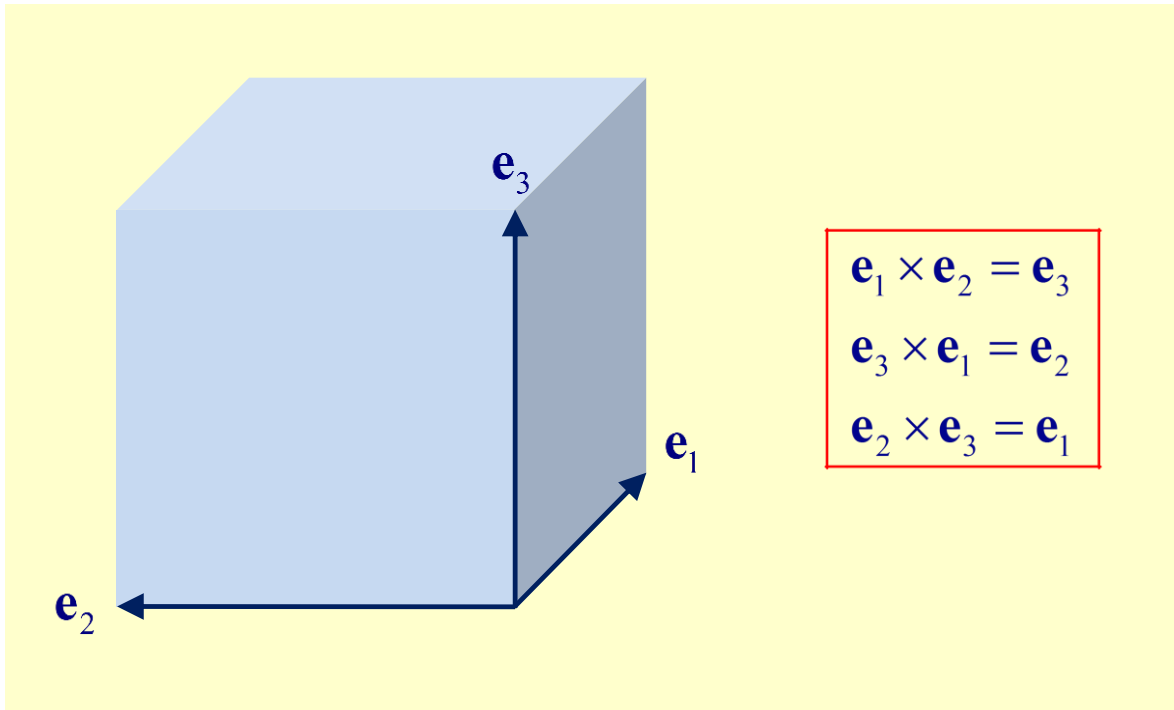
Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormada (i.e., ortogonal e normada) de \mathbb{R}^3 , i.e., tem-se

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

(este δ_{mn} , assim definido, é designado por delta de Kronecker). Então,

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3} .$$

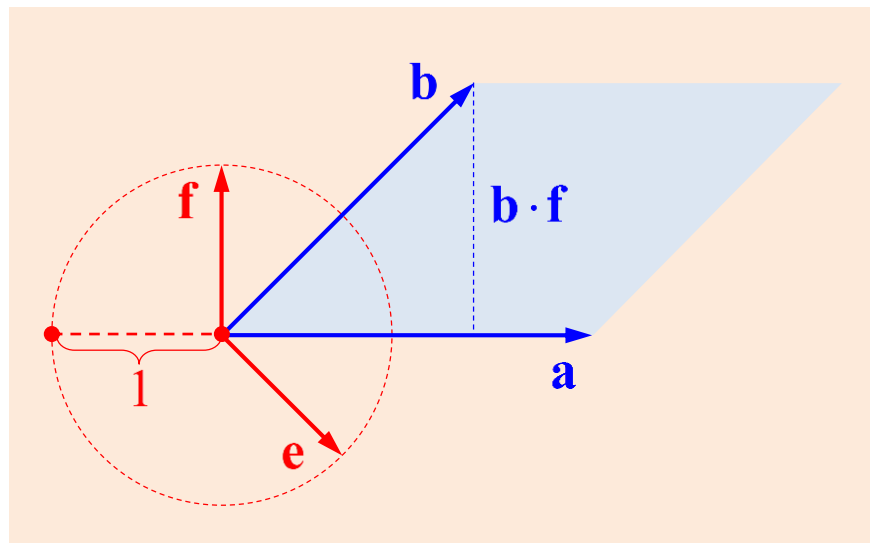
Este resultado decorre imediatamente da figura anexa.



Considera-se, agora, o chamado *produto misto* de três vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$:

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \mapsto \alpha \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{produto misto}} .$$

Consideremos, neste caso, a figura seguinte.



Nesta figura $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ são dois vectores que constituem uma base do plano em que se encontram definidos os dois vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Considera-se que $|\mathbf{e}| = |\mathbf{f}| = 1$ (i.e., são vectores unitários). Admite-se, ainda, que se tem $\mathbf{f} \perp \mathbf{a}$ e $\mathbf{e} \perp \mathbf{b}$, i.e., $\mathbf{a} \cdot \mathbf{f} = 0$ e $\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = 0$. Nestas condições, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}$ corresponde à altura do paralelogramo formado pelos vectores (\mathbf{a}, \mathbf{b}) em relação à base $a = |\mathbf{a}|$. Mas então, tem-se

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}).$$

Analogamente,

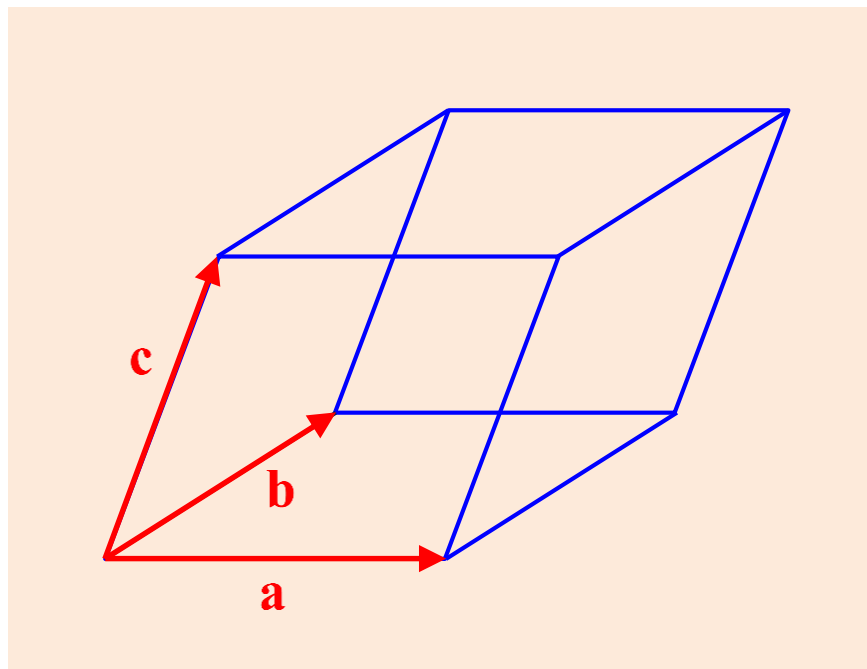
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}).$$

Definamos, agora, o paralelepípedo da figura anexa da página seguinte. Neste caso aparece um terceiro vector \mathbf{c} que não tem de ser ortogonal ao plano definido por (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Introduzamos, então, um terceiro vector unitário \mathbf{g} com a mesma orientação do produto externo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, i.e., tem-se

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \mathbf{g} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta) \mathbf{g},$$

em que $\theta = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Logo, também,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta).$$



O volume do paralelepípedo formado por $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ é dado por

$$\mathcal{V} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |(\mathbf{c} \cdot \mathbf{g})| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |(\mathbf{g} \cdot \mathbf{c})| = [|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \mathbf{g}] \cdot \mathbf{c} \Rightarrow \boxed{\mathcal{V} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} .$$

Note-se que este volume \mathcal{V} é um *volume orientado*, i.e., tem sinal *positivo* se $\mathbf{c} \uparrow \uparrow \mathbf{g}$ e sinal *negativo* se $\mathbf{c} \uparrow \downarrow \mathbf{g}$. Note-se, porém, que – de forma análoga – se teria

$$\boxed{\mathcal{V} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}} .$$

Mas então, no produto misto dos três vectores, é possível trocar entre si os sinais de produto interno e externo:

$$\boxed{\mathcal{V} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} .$$

Podemos facilmente generalizar este resultado escrevendo:

$$\boxed{\mathcal{V} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})} .$$

Quando os três vectores $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ forem *linearmente dependentes* o paralelepípedo colapsa e vem $\mathcal{V} = 0$.

Demonstração

Com efeito, admitamos que

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} .$$

Neste caso, infere-se que

$$\mathcal{V} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \alpha [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] + \beta [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$$

e, como $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ e $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, tira-se efectivamente que

$$\mathcal{V} = 0 ,$$

QED.

Conclusão – É condição necessária e suficiente para que os três vectores $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sejam *linearmente independentes* que se tenha $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$.

Demonstra-se, facilmente, que

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Coloca-se, agora, a seguinte questão fundamental:

Questão: *O produto externo é associativo?*

Vamos provar, a seguir, que a resposta a esta pergunta é a seguinte: não, o produto externo *não é associativo*, i.e.,

$$\boxed{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}.$$

Como se viu anteriormente, tem-se

$$\begin{cases} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| (\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{f} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) \mathbf{a}, \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b}| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{b}. \end{cases}$$

De facto, $\mathbf{f} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $\mathbf{e} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $|\mathbf{e}| = |\mathbf{f}| = 1$, $[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{f}] \uparrow \downarrow \mathbf{a}$ e $[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}] \uparrow \uparrow \mathbf{b}$. Além disso,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta) \mathbf{g} = [ab \sin(\theta)] \mathbf{g} \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{g} = 0.$$

O vector \mathbf{c} pode escrever-se na forma

$$\mathbf{c} = x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}$$

pois $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^3 . Mas então, vem

$$\begin{cases} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}) \\ = x[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}] + y[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{f}] + z[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{g}] \\ = x[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{b}] - y[(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) \mathbf{a}] \\ = [\mathbf{a} \cdot (x\mathbf{e})] \mathbf{b} - [\mathbf{b} \cdot (y\mathbf{f})] \mathbf{a} \\ = [\mathbf{a} \cdot (x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g})] \mathbf{b} - [\mathbf{b} \cdot (x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g})] \mathbf{a} \end{cases}$$

uma vez que se tem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{g} = 0$. Logo, vem finalmente

$$\boxed{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}}.$$

Analogamente, viria (usando a anti-simetria do produto externo e a simetria do produto interno)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = -[(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}]$$

donde se tira:

regra fundamental
do produto externo

↦

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Está, deste modo, provada a afirmação segundo a qual o produto externo não é associativo (no caso geral):

$$\begin{aligned} | (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}] - [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \end{aligned}$$

A exceção corresponde ao *caso particular* em que

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} = 0 \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Da regra anteriormente demonstrada

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

resulta, também, que

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

Mas, por outro lado, é

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}).$$

Obtém-se, deste modo, a

identidade de
Lagrange

↦

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$$

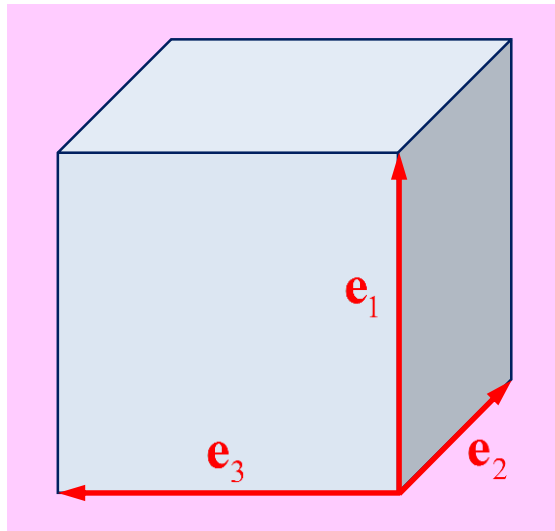
Suponhamos, e.g., que os dois vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} residem em planos perpendiculares entre si que têm uma linha comum correspondente ao *vector unitário* \mathbf{k} . Nestas condições, infere-se da identidade de Lagrange:

$$0 = (\mathbf{a} \times \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{k}^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$\therefore (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Gradiente, Divergência e Rotacional

Consideremos um sistema de coordenadas rectangulares cartesianas com orientação direita (X, Y, Z)
. A base ortonormada deste espaço vectorial é dada pelos vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:



Trata-se de uma base *direita* pois

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \Rightarrow \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$$

ou, se se preferir,

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Facilmente se verifica que também se tem (permutação cíclica dos índices):

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = 1; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = 1.$$

Como a base é ortonormada, vem (métrica euclidiana)

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste espaço vectorial existe um ponto origem designado por $O(0, 0, 0)$. Em relação a esta origem qualquer ponto $P(x, y, z)$ pode ser identificado pelo vector posição

$$\mathbf{r} = \overline{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Define-se, então, o operador *nabla* ∇ :

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Em tudo o que se segue considera-se, sempre, um campo escalar $\Phi = \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(x, y, z)$ e um campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$. Assim, nomeadamente, tem-se

$$\mathbf{F} = F_x(x, y, z)\mathbf{e}_1 + F_y(x, y, z)\mathbf{e}_2 + F_z(x, y, z)\mathbf{e}_3.$$

Definem-se, então:

Gradiente do campo escalar Φ

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_3$$

Divergência do campo vectorial \mathbf{F}

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional do campo vectorial \mathbf{F}

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Assim: (i) $\nabla\Phi \in \mathbb{R}^3$; (ii) $\nabla \cdot \mathbf{F} \in \mathbb{R}$; (iii) $\nabla \times \mathbf{F} \in \mathbb{R}^3$.

Facilmente se verifica que

$$\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = d\Phi.$$

Consideremos a superfície $\Phi(x, y, z) = \Phi_0$. Se dois pontos \mathbf{P} e \mathbf{Q} pertencem a essa superfície, então $d\Phi = 0$, pelo que

$$\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Infere-se, portanto, que o vector $\nabla\Phi$ é sempre normal (ou perpendicular) à superfície de nível Φ_0 . Além disso, tem-se

$$|\nabla\Phi| |d\mathbf{r}| \cos(\theta) = |d\Phi|,$$

em que $\theta = \angle(\nabla\Phi, d\mathbf{r})$. Logo, para uma dado $|d\mathbf{r}|$, verifica-se que o máximo de variação do campo Φ se obtém quando o deslocamento (elementar) $d\mathbf{r}$ é paralelo a $\nabla\Phi$. Por outras palavras: o gradiente $\nabla\Phi$ aponta na direcção da máxima variação de Φ .

Um campo vectorial \mathbf{F} diz-se *conservativo* quando existe um potencial escalar Φ tal que

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla\Phi}.$$

Neste caso, vem

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times (\nabla\Phi) = 0},$$

pelo que o campo \mathbf{F} se diz *irrotacional*. Ou seja: um campo conservativo é sempre irrotacional. Por exemplo: o campo electrostático, em que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, é um campo conservativo (ou derivado de um potencial escalar). Já o campo magnetostático, em que $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, não é irrotacional.

Um campo vectorial \mathbf{F} diz-se *solenoidal* quando se tiver, em qualquer ponto do espaço,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F} = 0}.$$

Como não existem (tanto quanto se sabe actualmente) cargas magnéticas (ou monopolos magnéticos) – de acordo com a lei de Gauss magnética – visto que se tem $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, conclui-se que o campo magnético é solenoidal. Já o campo de excitação eléctrica \mathbf{D} não é, em geral, solenoidal: de acordo com a lei de Gauss eléctrica, tem-se $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$.

Quando um campo \mathbf{F} é solenoidal então existe um potencial vector \mathbf{A} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$. Com efeito, mostra-se que

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0}.$$

Por exemplo: dado que o campo magnético é solenoidal, uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, então existe necessariamente o potencial vector \mathbf{A} tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

As equações de Maxwell, portanto, permitem a definição de dois potenciais: (i) um *potencial escalar* Φ ; (ii) um *potencial vector* \mathbf{A} . Com efeito, tem-se:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \boxed{\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0}$$

$$\therefore \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}.$$

Em conclusão: O conhecimento dos potenciais (Φ, \mathbf{A}) permite a determinação dos campos de intensidade electromagnética (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Já os campos de excitação electromagnética (\mathbf{D}, \mathbf{H}) só podem ser determinados a partir do conhecimento das fontes (ρ, \mathbf{J}) e dadas as relações constitutivas do meio.

EXEMPLO 1 – Consideremos o campo escalar $\Phi(\mathbf{r}) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Então, vem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

pelo que

$$\nabla \Phi = \frac{1}{r} (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r,$$

onde $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r$ corresponde ao vector unitário (ou versor) do vector \mathbf{r} , i.e., $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$ com $r = |\mathbf{r}|$. Note-se que, neste caso, as superfícies de nível são esferas centradas sobre a origem. E, então, $\nabla \Phi$ é radial, i.e., é normal a essas superfícies (o gradiente aponta centrifugamente, i.e., no sentido da máxima variação da distância r ao centro).

EXEMPLO 2 – Consideremos, agora, o campo $\Phi = 1/r$. Neste caso, vem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = - \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Portanto, tem-se

$$\nabla\Phi = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

EXEMPLO 3 – Consideremos, agora, o seguinte campo vectorial: $\mathbf{F} = \mathbf{r}$. Neste caso, vem simplesmente

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

EXEMPLO 4 – O campo electrostático de uma carga pontual q , centrada na origem e imersa no vácuo, é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Neste caso, é

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3}{r^3} \right) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right].$$

Por exemplo, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Ou seja, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) = \frac{-2y^2 + x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{-2z^2 + x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = 0$$

desde que $r \neq 0$. Assim,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad r \neq 0.$$

Porém, o que se passa na origem do sistema de coordenadas é mais difícil de analisar. Vejamos.

Define-se a *distribuição de Dirac* (em três dimensões) como sendo

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}) = -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Por outro lado, tem-se (ver EXEMPLO 2)

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \Rightarrow \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] = (\nabla \cdot \nabla) \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Assim, podemos escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Note-se que este resultado coincide, nestas condições, com a lei de Gauss eléctrica

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

uma vez que se pode, também, escrever (neste caso)

$$\varrho = q \delta(x) \delta(y) \delta(z) = q \delta(\mathbf{r}).$$

Efectivamente, vem

$$q \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = q.$$

A lei de Gauss permite, portanto, escrever

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \int_{S_V} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}) dS \Rightarrow \frac{q}{\epsilon_0} = \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) (4\pi r^2),$$

entendendo-se, assim, que

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r})}$$

para uma carga pontual q , imersa no vácuo e na origem $r=0$ do sistema de coordenadas. Claro está que, sendo $r \neq 0$, é simplesmente $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (como se viu atrás).

A distribuição delta de Dirac $\delta(x)$ tem dimensões SI de $[\text{m}^{-1}]$. Com efeito,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Assim, a expressão

$$\varrho = q \delta(x) \delta(y) \delta(z) = q \delta(\mathbf{r}),$$

faz, efectivamente, sentido em termo dimensionais: $[\varrho] = \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$, $[q] = \text{C}$, $[\delta(\mathbf{r})] = \text{m}^{-3}$.

EXEMPLO 5 – Consideremos, neste exemplo, o seguinte campo vectorial:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}).$$

Pretende-se, então, calcular $\nabla \times \mathbf{A}$. Vejamos. Começemos por notar que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{r}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r}].$$

Porém, atendendo ao EXEMPLO 3, é

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3.$$

Logo, vem

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2} [3\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r}].$$

Calculemos, agora, $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r}$. Obtém-se

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = B_x \mathbf{e}_1 + B_y \mathbf{e}_2 + B_z \mathbf{e}_3 = \mathbf{B}.$$

Portanto, vem

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2} [3\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r}] = \frac{1}{2} (3\mathbf{B} - \mathbf{B}) \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}}.$$

Este resultado está de acordo com a lei de Gauss magnética. Com efeito, vem

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

uma vez que se tem

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0.$$

EXEMPLO 6 – Neste exemplo considera-se um caso muito simples: mostra-se que $\nabla \times \mathbf{r} = 0$.

Vejam os porquê. Tem-se

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3.$$

Mas

$$(\nabla \times \mathbf{r})_x = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{r})_y = \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{r})_z = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0,$$

donde se tira que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{r} = 0},$$

QED (do latim: *quod erat demonstrandum*).

EXEMPLO 7 – Consideremos o seguinte campo vectorial:

$$\mathbf{F} = F_x(x, y) \mathbf{e}_1 + F_y(x, y) \mathbf{e}_2 = \frac{y \mathbf{e}_1 - x \mathbf{e}_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Vamos calcular o respectivo rotacional: $\nabla \times \mathbf{F}$. Neste caso, vem sucessivamente

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Portanto, infere-se que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_3.$$

Introduzindo, então, a distância

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ainda se pode escrever

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_3}.$$

Definamos, então, o módulo

$$\mathfrak{R} = |\nabla \times \mathbf{F}| = \frac{1}{\varrho}.$$

Conclui-se, desta forma, que

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \mathfrak{R} = \infty, \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathfrak{R} = 0.$$

EXEMPLO 8 – Consideremos, de novo, o caso do EXEMPLO 4: o campo electrostático de uma carga pontual q , centrada na origem e imersa no vácuo, é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Vamos, então, calcular o respectivo rotacional. Vem

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left[\frac{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right].$$

Façamos, para simplificar a notação,

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Nestas condições, tem-se

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Mas então, tira-se que

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = - \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = - \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Inferre-se daqui que

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = 0.$$

Analogamente, viria

$$(\nabla \times \mathbf{F})_y = (\nabla \times \mathbf{F})_z = 0 \quad \therefore \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}}.$$

Este resultado é básico em regime estacionário e, mais concretamente, também, em electrostática (tal como o resultado obtido no exemplo anterior). Com efeito, usando a equação de Maxwell-Faraday, vem

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}.$$

NOTA – Só nestas circunstâncias (campo irrotacional ou conservativo) é que é possível definir, com todo o rigor, a diferença de potencial Φ (ou tensão eléctrica U) entre dois pontos distintos P e Q . De facto, vem sucessivamente:

$$\boxed{\text{campo irrotacional}} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\nabla \Phi} \Rightarrow \boxed{\text{campo conservativo}}$$

$$\Rightarrow U_{PQ} = \int_P^Q (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = - \int_P^Q (\nabla \Phi \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = - \int_P^Q \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} = - \int_P^Q d\Phi = -[\Phi(Q) - \Phi(P)]$$

$$\therefore \boxed{U_{PQ} = \Phi(P) - \Phi(Q)}.$$

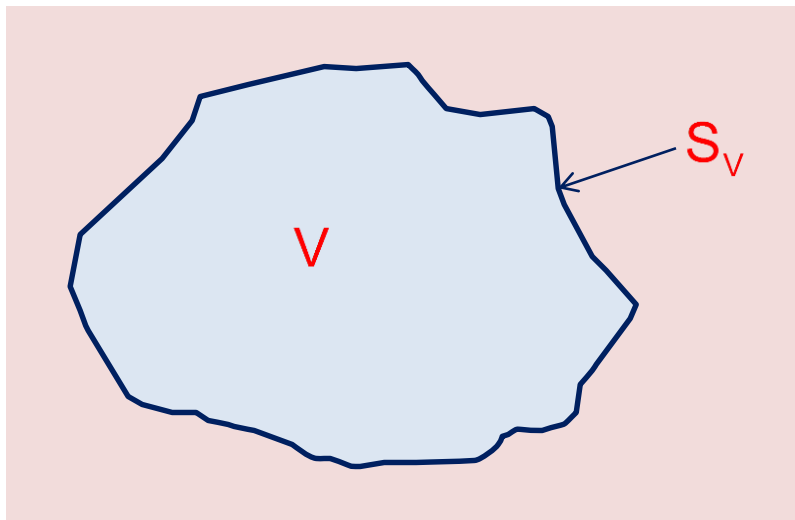
Teoremas Integrais

No estudo do electromagnetismo existem dois teoremas integrais que são fundamentais para passar da *forma local* (ou diferencial) das equações de Maxwell para a respectiva *forma global* (ou integral). Esses teoremas são: (i) o teorema de Gauss ou da divergência; (ii) o teorema de Stokes.

TEOREMA DE GAUSS

Consideremos a figura anexa. Então:

$$\oint_{S_V} (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\sigma = \int_V (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) d\tau$$



O volume V encontra-se limitado pela superfície *fechada* S_V . O volume em questão corresponde a uma região simplesmente conexa, i.e., sem «buracos». Admitamos que nesta região do espaço está definido um campo vectorial \mathbf{F} . Nesta região, quer o campo vectorial quer as suas primeiras

derivadas são contínuas. Designa-se por $d\sigma$ o elemento de superfície definido genericamente sobre a superfície S_V que delimita o volume V . Designa-se, ainda, por $\hat{\mathbf{n}}_e$ o vector unitário que define a normal exterior, i.e., a normal à superfície S_V no sentido de dentro para fora da região considerada.

Este teorema permite formular, na forma integral, quer a lei de Gauss magnética quer a lei de Gauss eléctrica.

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad \mapsto \quad \boxed{\oint_{S_V} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) d\sigma = 0}$$

Assim: o fluxo magnético *total* que atravessa a superfície fechada S_V é nulo. Em termos mais pictóricos: as linhas de força que entram, para a região delimitada por S_V , são as mesmas que saem dessa região (i.e., não há criação nem destruição de linhas de força).

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho} \quad \mapsto \quad \oint_{S_V} (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) d\sigma = \int_V \rho d\tau \quad \mapsto \quad \boxed{\oint_{S_V} (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) d\sigma = Q_V}$$

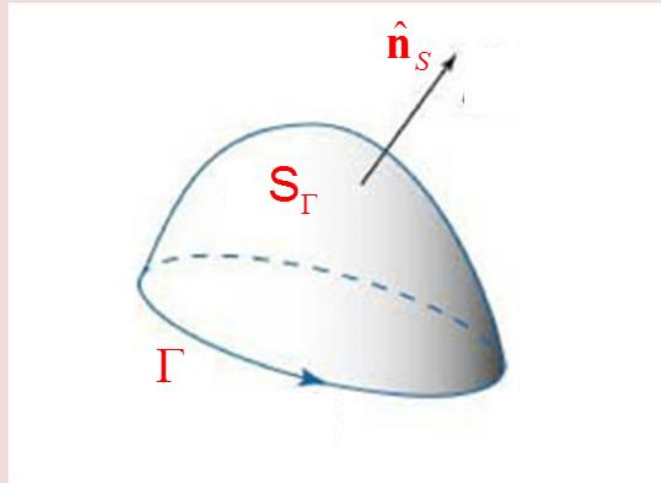
Assim: o fluxo da excitação eléctrica *total* que atravessa a superfície fechada S_V é igual à carga eléctrica total Q_V que existe no volume V . Ou seja: (i) saem mais linhas de força (da região considerada) do que as linhas de força (da excitação eléctrica) que entram quando $Q_V > 0$; (ii) entram mais linhas de força do que as que saem quando $Q_V < 0$. Por outras palavras: as cargas eléctricas positivas criam linhas de força; as cargas eléctricas negativas destroem linhas de força.

TEOREMA DE STOKES

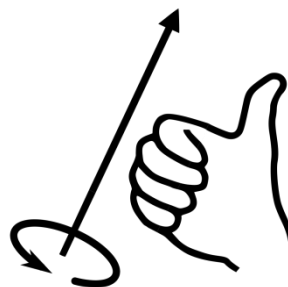
Consideremos as figuras anexas da página seguinte. Então:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = \int_{S_V} [(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S] d\sigma} .$$

Teorema de Stokes



O contorno fechado Γ tem sobre ele definida uma orientação. Seja $\hat{\mathbf{t}}$ o vector unitário tangente, em cada ponto, ao referido contorno (com a mesma orientação). Designa-se por S_Γ a superfície *aberta* que se apoia sobre o contorno Γ . Representa-se por $\hat{\mathbf{n}}_S$ o vector unitário normal, em cada ponto, à superfície S_Γ (a chamada normal de Stokes). O sentido de $\hat{\mathbf{n}}_S$ é determinado pela «regra do saca-rolhas», ou seja: tracemos a linha curva Γ , fechada, de tal forma que a área assim definida esteja sempre para a esquerda; então, escolhe-se o sentido de $\hat{\mathbf{n}}_S$ de tal forma que este vector aponte «para cima» (regra da mão direita) – ver figura seguinte.



Este teorema permite formular, na forma integral, quer a equação de Maxwell-Faraday quer a equação de Maxwell-Ampère.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad \mapsto \quad \boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}}$$

Ou seja: obtém-se a *lei geral da indução* de Faraday. Tem-se:

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds, \quad \phi = \int_{S_{\Gamma}} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\sigma.$$

NOTA – Em regime estacionário, portanto, tem-se $\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = 0$. Em rigor, só nesta situação é que se pode falar no conceito de tensão (ou diferença de potencial). De facto, só nesta situação é que se pode falar numa aplicabilidade rigorosa da lei das malhas de Kirchhoff (em inglês: *Kirchhoff's voltage law*, KVL). Na prática, desde que as frequências não sejam muito elevadas, é razoável introduzir o conceito de tensão. Porém, em microondas e, por maioria de razão, em Fotónica, tal não é razoável – a não ser, apenas, enquanto dispositivo meramente formal.

Considera-se, seguidamente, duas aplicações relacionadas com casos particulares da equação de Maxwell-Ampère: (i) a lei de Ampère, válida em regime estacionário ou quando é possível desprezar a corrente de deslocamento $\mathbf{J}_D = \partial \mathbf{D} / \partial t$; (ii) a lei de Maxwell, válida em regiões sem correntes.

Primeira aplicação: Equação de Maxwell-Ampère com $\mathbf{J}_D = 0$ (Lei de Ampère)

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad \mapsto \quad \boxed{\oint_{\Gamma} (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = \int_{S_{\Gamma}} (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\sigma = I}$$

Segunda aplicação: Equação de Maxwell-Ampère com $\mathbf{J} = 0$ (Lei de Maxwell)

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad \mapsto \quad \boxed{\oint_{\Gamma} (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = \int_{S_r} (\mathbf{J}_D \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) d\sigma = I_D}$$

Nos dois teoremas considerados – de Gauss e de Stokes – existe uma relação entre os domínios de integração de cada membro. No teorema de Gauss, a superfície S_V é a fronteira de V ; por essa razão é, também, costume escrever $S_V = \partial V$. No teorema de Stokes, o contorno Γ é a fronteira de S_r ; por essa razão é, também, costume escrever $\Gamma = \partial S_r$.

$$\boxed{\text{Teorema de Gauss}} \mapsto \boxed{\oint_{\partial V} (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\sigma = \int_V (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) d\tau}$$

$$\boxed{\text{Teorema de Stokes}} \mapsto \boxed{\oint_{\partial S_r} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}) ds = \int_{S_r} [(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s] d\sigma}$$

Equações de Maxwell-Boffi

Nesta adenda vai-se discutir a chamada *formulação de Boffi* das equações de Maxwell. A importância desta formulação deve-se ao facto de, através dela, se tornar mais claro – em electrodinâmica clássica macroscópica – o conceito de meio. Começemos, então, por recordar que as equações de Maxwell (ver página 3) podem ser separadas em dois grupos: (i) o grupo de Faraday, que governa a intensidade electromagnética caracterizada pelos vectores (\mathbf{E}, \mathbf{B}) ; (ii) o grupo de Maxwell, que governa a excitação electromagnética caracterizada pelos vectores (\mathbf{D}, \mathbf{H}) .

Na formulação de Boffi, quer o grupo de Faraday quer o grupo de Maxwell são escritos exclusivamente em termos da intensidade electromagnética (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Como o grupo de Faraday já se encontra assim formulado, resta – portanto – reformular o grupo de Maxwell (também) em termos de (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Vejamos pois.

Começa-se por relacionar directamente as grandezas extensivas (\mathbf{D}, \mathbf{H}) com as grandezas intensivas (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Introduzem-se, para o efeito, dois novos campos vectoriais: (i) o campo \mathbf{P} da polarização dieléctrica; (ii) o campo \mathbf{M} da magnetização. Faz-se, então,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{aligned}$$

de forma que, da lei de Gauss eléctrica, vem sucessivamente

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho} \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}.$$

Logo, introduzindo a densidade (volúmica) de *carga de polarização* ρ_p , tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\varrho_p,$$

é então possível reescrever a lei de Gauss eléctrica na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho_t}{\varepsilon_0},$$

desde que se defina a densidade (volúmica) total de carga ϱ_t tal que

$$\varrho_t = \varrho + \varrho_p.$$

Note-se que, nas equações de Maxwell, ϱ se refere, exclusivamente, às *cargas livres*. Vejamos, de seguida, como reformular a equação de Maxwell-Ampère.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

ou, como

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0},$$

vem finalmente

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

desde que se defina a *densidade total de corrente* \mathbf{J}_t tal que

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Portanto, na formulação de Boffi das equações de Maxwell, o grupo de Maxwell aparece escrito – tal como o grupo de Faraday – em termos de (\mathbf{E}, \mathbf{B}) mas com as substituições $\varrho \rightarrow \varrho_t$ e $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_t$, i.e., as cargas e correntes *livres* são substituídas pelas cargas e correntes *totais*.

EQUAÇÕES DE MAXWELL-BOFFI

Grupo de Faraday	→	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	↪	equação de Maxwell-Faraday
		$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	↪	lei de Gauss magnética

Grupo de Maxwell	→	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	↪	equação de Maxwell-Ampère
		$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0}$	↪	lei de Gauss eléctrica

Deve notar-se que, alguns físicos teóricos, preferem esta forma *reducionista* de escrever as equações de Maxwell. Com efeito, o conceito de meio desaparece – apenas sobram, nesta visão fundamental, *todas* as cargas e *todas* as correntes: agora, no grupo de Maxwell, figuram (ρ_t, \mathbf{J}_t) em vez de (ρ, \mathbf{J}) . Isto está, portanto, de acordo com o programa *reducionista*.

Proposição *reducionista*: *Um meio é, muito simplesmente, um conjunto de cargas e de correntes.*

Naturalmente que, do ponto de vista rigoroso (e, portanto, fundamental), esta afirmação é *verdadeira*. Mas, com esta definição, obnubila-se a necessidade *pragmática* de qualquer afirmação científica no domínio natural.

Proposição *fenomenológica*: *Uma meio é uma estrutura electromagnética, definida numa certa região do espaço, onde os vários campos (de excitação e de intensidade) obedecem a um conjunto de relações constitutivas.*

Ou seja: a *visão fenomenológica*, que considera um conjunto de *relações constitutivas* para definir um meio (ou conjunto de meios), é mais pragmática e – certamente – (muito) mais *fecunda* (embora menos *fundamental*). Com a definição de meio(s), é possível ir-se (muito) mais longe na previsão técnico-científica sobre a circunstância electromagnética: para um dado meio (ou conjunto de meios), que tipificam macroscopicamente essa circunstância, dá-se uma resposta precisa – algo que seria impossível na visão reducionista (mais fundamental, é certo, mas menos preditiva).

Em conclusão: O grupo de Maxwell, escrito em termos das grandezas extensivas (\mathbf{D} , \mathbf{H}), requer um conjunto de relações constitutivas para se tornar uma descrição *completa*. Trata-se de uma visão mais fecunda – embora menos fundamental (na perspectiva reducionista).

Resta definir, com mais precisão, o que se entende – de facto – por *relações constitutivas*. No caso geral trata-se de estabelecer as seguintes relações.

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \end{cases}$$

Em engenharia electromagnética é mais usual, porém, reescrever as anteriores relações constitutivas numa forma diferente.

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \end{cases}$$

EXEMPLO

Um *meio bi-isotrópico* é definido através de quatro escalares $(\varepsilon, \mu, \kappa, \chi)$, como segue (as equações que se seguem estão escritas no *domínio da frequência* e não no *domínio do tempo*).

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{relações} \\ \text{constitutivas} \end{array}} \mapsto \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} (\kappa + i \chi) \mathbf{H} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} (\kappa - i \chi) \mathbf{E} \end{cases}$$

Um meio isotrópico simples, sem acoplamento magneto-eléctrico, tem $\kappa = \chi = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \end{cases}$$

Note-se que, no caso geral, as relações constitutivas do meio bi-isotrópico podem ser reescritas na forma alternativa seguinte.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{relações} \\ \text{constitutivas} \end{array}} \mapsto \begin{cases} \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left\{ \varepsilon_0 \left[\varepsilon \mu - (\kappa^2 + \chi^2) \right] \mathbf{E} + \frac{1}{\eta_0} (\kappa + i \chi) \mathbf{B} \right\} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \frac{1}{\eta_0} (\kappa - i \chi) \mathbf{E} \right\} \end{cases} \quad \left[\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right]$$

Este caso geral (bi-isotrópico) reduz-se a dois casos mais simples (de interesse, em si próprios): (i) quando $\kappa = 0$, o meio é apenas descrito pelos três parâmetros (ε, μ, χ) e, então, diz-se *meio quiral*, com

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left[\varepsilon_0 (\varepsilon \mu - \chi^2) \mathbf{E} + i \frac{\chi}{\eta_0} \mathbf{B} \right], \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + i \frac{\chi}{\eta_0} \mathbf{E} \right), \end{cases}$$

(ii) quando $\chi = 0$, o meio é apenas descrito pelos três parâmetros $(\varepsilon, \mu, \kappa)$ e, então, diz-se *meio de Tellegen*, com

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left\{ \varepsilon_0 (\varepsilon \mu - \kappa^2) \mathbf{E} + \frac{\kappa}{\eta_0} \mathbf{B} \right\} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \frac{\kappa}{\eta_0} \mathbf{E} \right) \end{cases}$$

Novamente, aqui, quando se faz $\kappa = \chi = 0$ (i.e., se anula todo o acoplamento magneto-elétrico), vem (meio simplesmente isotrópico)

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}. \end{cases}$$

Identidades Vectoriais

Listam-se, aqui, algumas identidades que são importantes no cálculo vectorial. Em tudo o que se segue, Φ e Ψ são campos escalares (arbitrários). Por sua vez, \mathbf{F} e \mathbf{G} são campos vectoriais (também arbitrários). Apenas se admite que todos estes campos (escalares e vectoriais) são diferenciáveis.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

$$\nabla (\Phi \Psi) = \Phi \nabla \Psi + \Psi \nabla \Phi$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi$$

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{F}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \Phi$$

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{F}) = \Phi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \Phi$$

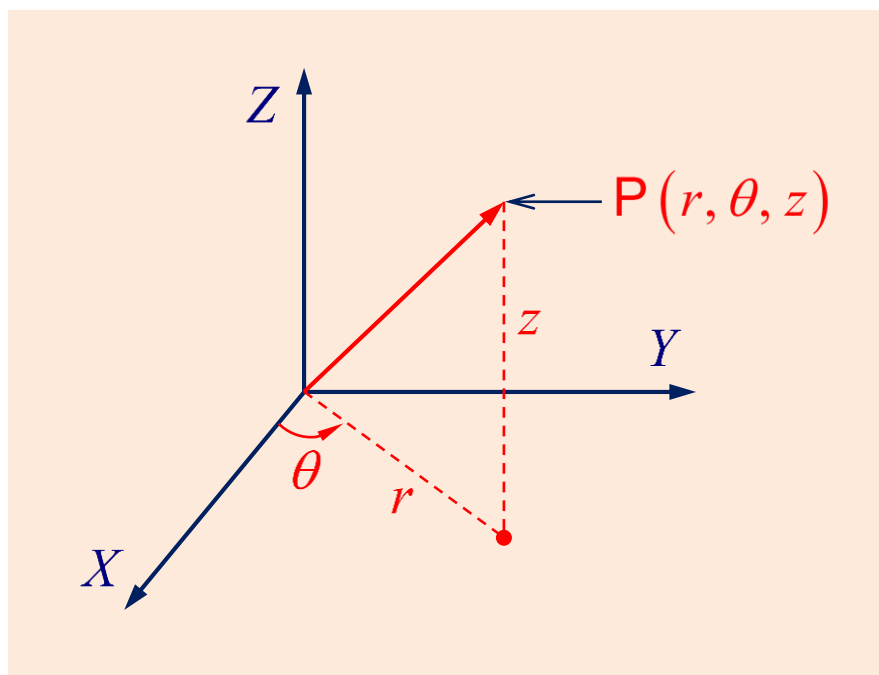
$$\nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G} (\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$

$$\mathbf{F} \cdot \nabla \Phi = \mathbf{F} \cdot (\nabla \Phi) = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \Phi$$

Coordenadas Cilíndricas



$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r} = r \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + r \sin(\theta) \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| \mathbf{e}_r = h_r \mathbf{e}_r \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| \mathbf{e}_\theta = h_\theta \mathbf{e}_\theta \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| \mathbf{e}_z = h_z \mathbf{e}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \mathbf{e}_1 + r \cos(\theta) \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \\ h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r \\ h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1 \end{cases}$$

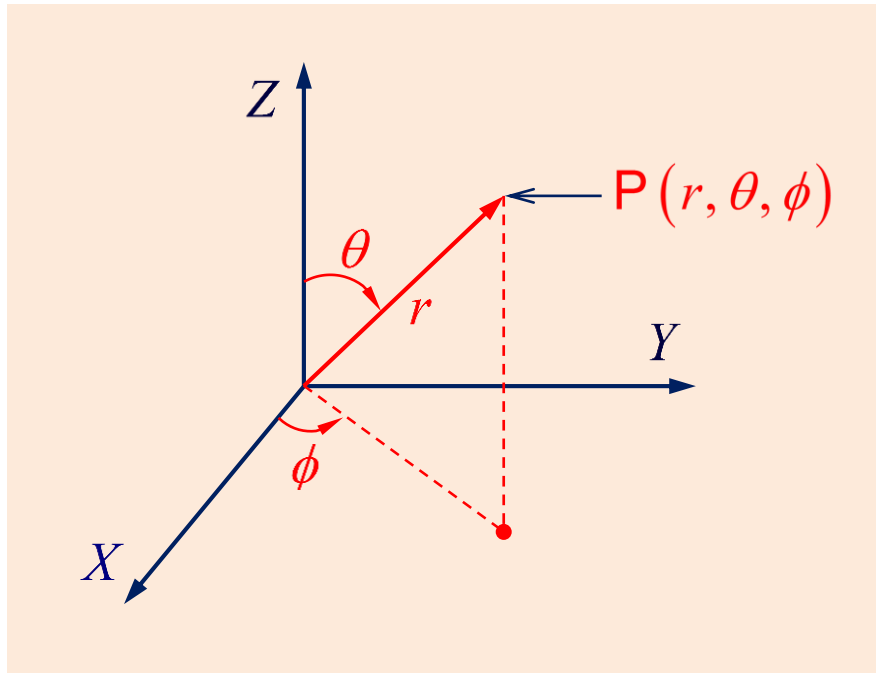
$$\therefore \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]$$

Coordenadas Esféricas



$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = r \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{r} = r \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_1 + r \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_2 + r \cos(\theta) \mathbf{e}_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| \mathbf{e}_r = h_r \mathbf{e}_r \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| \mathbf{e}_\theta = h_\theta \mathbf{e}_\theta \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| \mathbf{e}_\phi = h_\phi \mathbf{e}_\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_2 + \cos(\theta) \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_1 + r \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_2 - r \sin(\theta) \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_1 + r \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \\ h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r \\ h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) F_\theta] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin(\theta) \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin(\theta) F_\phi \end{vmatrix}$$

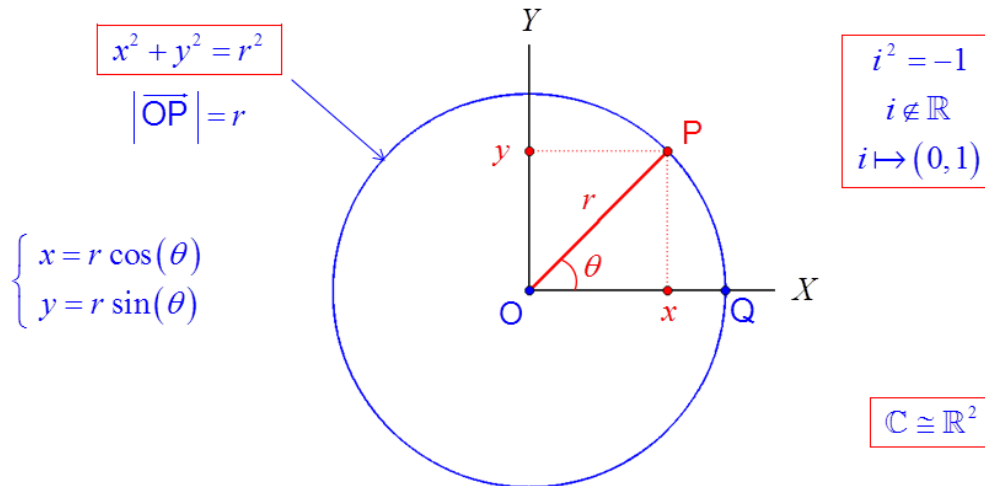
$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

Funções Circulares e Números Complexos

Existe uma relação íntima entre as funções (trigonométricas) circulares e os números complexos. Essa relação é expressa através da fórmula de Euler (ver figura anexa):

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Funções circulares



$$P(x, y) \mapsto z = r e^{i\theta} = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

$$r^2 = z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

Note-se, desde já, que:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = e^{i\theta} e^{-i\theta} = [\cos(\theta) + i \sin(\theta)][\cos(\theta) - i \sin(\theta)] \\ = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{cases}$$

Teorema de Pitágoras no plano euclidiano

$$\mapsto \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Demonstração

Começemos por notar que, por definição, se tem $i^2 = -1$ mas com $i \notin \mathbb{R}$. Além disso, vem

$$i^2 = -1 \Rightarrow i^{2k} = (-1)^k \Rightarrow i^{2k+1} = (-1)^k i.$$

Logo, pelo desenvolvimento em série da exponencial, obtém-se

$$\begin{aligned} \exp(i\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Mas, pelos desenvolvimentos em série das funções circulares,

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots, \\ \sin(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \end{cases}$$

infere-se, portanto, que

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

QED.

Em relação ao círculo da figura inicial, tem-se:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}.$$

Definem-se, ainda, as funções circulares:

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}, \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}.$$

Note-se, também, que se pode escrever:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin(\theta) = -\frac{i}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$$

pois

$$\boxed{i^{-1} = \frac{1}{i} = -i}.$$

Proposição fundamental – A circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano euclidiano que se encontram a uma *distância euclidiana* constante, de valor r , da origem O . Por distância euclidiana entende-se a distância correspondente ao teorema de Pitágoras do plano euclidiano.

Definição formal de *números complexos*:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}}.$$

No plano complexo a *unidade imaginária* corresponde ao ponto $i = (0, 1)$ que está sobre o eixo Y (ver figura inicial).

O sector circular, que se estende (na circunferência) desde o ponto $Q \mapsto (x=1, y=0)$ até ao ponto $P \mapsto (x=r \cos(\theta), y=r \sin(\theta))$, corta uma superfície (definida pelos três pontos O, P, Q) cuja área total é

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{2} r^2 \theta .$$

Quando se tem $\theta = 2\pi$, obtém-se a área (total) do círculo

$$\mathcal{A}(\theta = 2\pi) = \pi r^2 .$$

Note-se que, para a completa determinação do ponto P no plano euclidiano, deve-se ter

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi .$$

Demonstração

Vai-se, aqui, provar a fórmula anterior:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \theta .$$

Começemos por notar que, da expressão da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, se infere que $x = \sqrt{r^2 - y^2}$.

Então, o integral

$$I = \int_0^{r \sin(\theta)} \sqrt{r^2 + y^2} \, dy = r \int_0^{r \sin(\theta)} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} \, dy = \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

é, efectivamente, igual à soma da área \mathcal{A} (que se pretende determinar) com a área \mathcal{B} do triângulo:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} [r \cos(\theta)] [r \sin(\theta)] = \frac{1}{2} r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) .$$

Assim, uma vez calculado o valor do integral I , podemos calcular

$$\mathcal{A} = I - \mathcal{B} .$$

Calculemos, então, o integral I através da mudança de variável

$$u = \sin(v) \mapsto du = \cos(v) dv,$$

vindo

$$I = r^2 \int_0^\theta \sqrt{1 - \sin^2(v)} \cos(v) dv = r^2 \int_0^\theta \cos^2(v) dv.$$

Mas, atendendo a que

$$\cos^2(v) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2v)],$$

obtém-se finalmente

$$I = \frac{1}{2} r^2 \theta + \frac{1}{4} r^2 \sin(2\theta) = \frac{1}{2} r^2 \theta + \frac{1}{2} r^2 \sin(\theta) \cos(\theta).$$

Daqui se infere o valor de \mathcal{A} depois de subtrair o valor conhecido de \mathcal{B} .

Em termos de *estruturas algébricas abstractas*, o conjunto \mathbb{C} (dos *números complexos*) com as operações de adição e multiplicação constitui um *corpo* (em inglês: *field*). Vejamos, rapidamente, do que se trata.

Começemos por considerar um conjunto $A \neq \emptyset$ que, para fixar ideias, é um conjunto de números (esta hipótese não é, nem podia ser, relevante para a definição abstracta). Nesse conjunto A está definida uma *operação binária* que designaremos por \circ (pode ser uma adição $+$, uma multiplicação ou produto \times , etc.). Por operação binária entende-se que

$$\circ: A \times A \rightarrow A.$$

Primeira Definição – A estrutura algébrica (A, \circ) diz-se um *monóide* se tem elemento neutro e se a operação binária \circ é associativa.

Diz-se que $e \in A$ é o *elemento neutro* quando $x \circ e = e \circ x = x$ para qualquer $x \in A$. Prova-se que este elemento neutro é único. Um elemento $x \in A$ é *invertível* se (e só se) existe $y \in A$ tal que

$x \circ y = y \circ x = e$. Ao elemento y correspondente chama-se o *inverso* de x . A operação binária \circ é *associativa* quando $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ para quaisquer $x, y, z \in A$. Por exemplo: quando o conjunto em causa é o dos *números reais* e a operação considerada for a multiplicação, então o monóide (\mathbb{R}, \times) tem $e = 1$. No âmbito dos *números naturais* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ o par $(\mathbb{N}, +)$ não constitui um monóide pois não existe elemento neutro e . Já o par $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ é um monóide com $e = 0$.

Segunda Definição – Um monóide (A, \circ) diz-se um *grupo* se e só se todos os elementos de A forem invertíveis. Quando a operação binária for comutativa o grupo diz-se *abeliano*.

A operação binária \circ é *comutativa* quando $x \circ y = y \circ x$ para quaisquer $x, y \in A$. O monóide (\mathbb{R}, \times) não é um grupo pois o elemento $0 \in \mathbb{R}$ não tem inverso em \mathbb{R} . Designa-se por A^* o conjunto dos elementos invertíveis do monóide (A, \circ) . Tem-se $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ em relação ao monóide (\mathbb{R}, \times) . No caso dos *números inteiros* $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ tem-se $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$ em relação ao monóide (\mathbb{Z}, \times) que não é, portanto, um grupo. O monóide $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ não é um grupo pois não existem em \mathbb{N} números negativos; apenas o zero tem inverso aditivo.

Terceira Definição – Um terno ordenado $(A, +, \times)$ é um *anel* se $(A, +)$ é um grupo abeliano, o produto \times é associativo e a soma e o produto são distributivos. Um anel diz-se *unitário* se o produto tiver elemento neutro. Um anel é *abeliano* se o produto for comutativo.

A distributividade implica ter-se $x(y+z) = xy + xz$ e $(x+y)z = xz + yz$ para quaisquer $x, y, z \in A$. Usou-se, aqui, a convenção de se omitir o sinal \times na multiplicação, i.e., $u = xy$ é a mesma coisa que $u = x \times y$. Num anel é habitual designar o elemento neutro da adição $+$ por «zero» (e representa-se por «0») e o elemento neutro do produto \times por «identidade» (e representa-se por «1»). O conjunto dos números naturais \mathbb{N} não constitui um anel: $(\mathbb{N}, +)$ não é sequer um monóide –

muito menos um grupo e, por maioria de razão, um grupo abeliano. Note-se que o terno $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \times)$ também não é um anel pois $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ não é um grupo (como se viu atrás). Prova-se que, se A é um anel unitário, então (A^*, \times) é um grupo. Por exemplo: \mathbb{Z} é um anel unitário e (\mathbb{Z}^*, \times) , em que $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$, é um grupo (embora um grupo com apenas dois elementos).

Quarta Definição – Um anel $(A, +, \times)$ diz-se um *anel de divisão* se for unitário e se $A^* = A \setminus \{0\}$, i.e., se todos os elementos não-nulos forem invertíveis (em relação ao produto). Um *corpo* é um anel de divisão abeliano.

O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais, i.e.,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\},$$

constitui um corpo. Outros exemplos de corpos são \mathbb{R} e \mathbb{C} . Porém, o conjunto dos *quaterniões* \mathbb{H} de Hamilton constitui um anel de divisão que não é um corpo porque a multiplicação de quaterniões não é – no caso geral – uma operação comutativa. Sublinhe-se, também, que \mathbb{Z} não constitui um corpo: trata-se de um anel unitário que não é um anel de divisão. Com efeito, os inteiros

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\} = \{\dots, -4, -3, -2, 2, 3, 4, \dots\}$$

têm inversos multiplicativos exclusivamente em

$$\left\{ q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \mid -\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

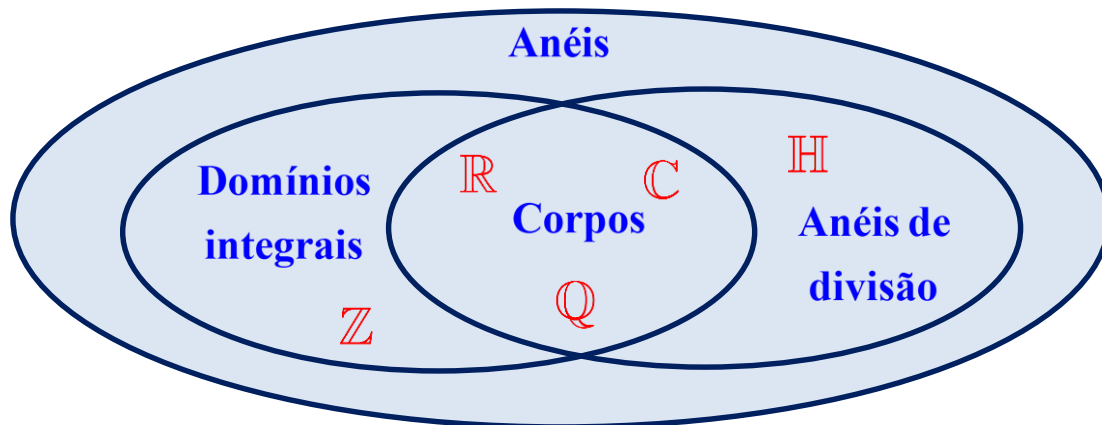
Quinta Definição – Um anel $(A, +, \times)$ unitário abeliano, com $A \neq \{0\}$, onde a lei do corte para o produto seja válida diz-se um *domínio integral*.

Diz-se que o anel A verifica a lei do corte para o produto se, para quaisquer $a, b, c \in A$ com $c \neq 0$, se verificarem (simultaneamente) as duas seguintes proposições:

$$\boxed{\begin{array}{l} ac = bc \Rightarrow a = b \\ ca = cb \Rightarrow a = b \end{array}}.$$

São exemplos de domínios integrais os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} . O conjunto \mathbb{H} dos quaterniões de Hamilton é um anel que não é um domínio integral. Note-se, por fim, que o conjunto \mathbb{N} não é um anel: os números naturais não são invertíveis em relação à adição. Em inglês, em que *ring* significa anel, existe a piada de chamar a \mathbb{N} um *rig* pois é um *ring* sem o «n» de negativos, i.e., a parte que falta aos naturais para formarem um anel.

O conjunto \mathbb{O} dos *octoniões* é uma generalização do conjunto \mathbb{H} dos quaterniões de Hamilton. No entanto, o produto de octoniões não é – no caso geral – associativo. Por essa razão (\mathbb{O}, \times) não é um monóide (e, muito menos, um grupo abeliano ou, sequer, um grupo). Logo, $(\mathbb{O}, +, \times)$ (ou, mais simplesmente, \mathbb{O}) não é um anel.

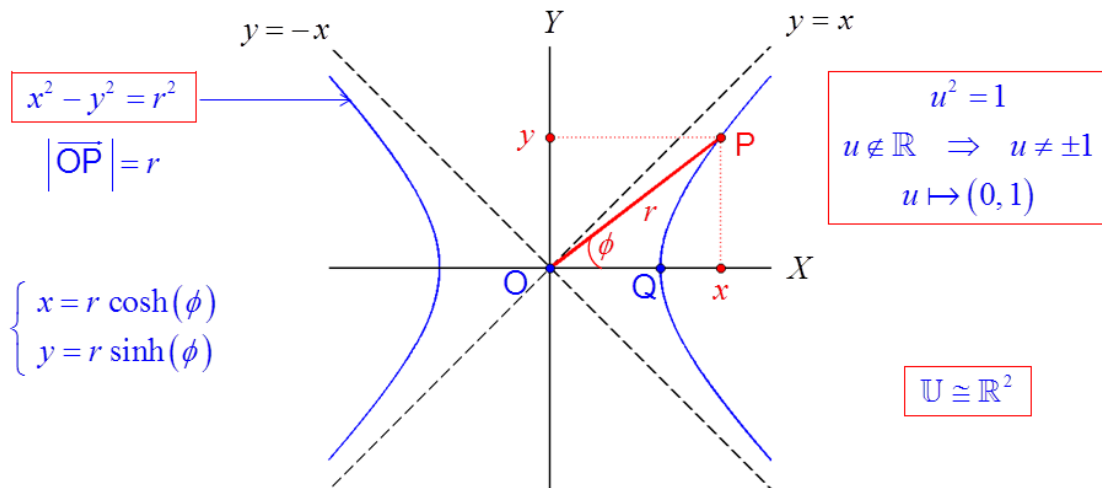


Funções Hiperbólicas e Números Hiperbólicos

Existe uma relação íntima entre as funções hiperbólicas e os números hiperbólicos. Essa relação é expressa através da fórmula (generalizada) de Euler (ver figura anexa):

$$e^{u\theta} = \cosh(\phi) + u \sinh(\phi)$$

Funções hiperbólicas



$$P(x, y) \mapsto w = r e^{u\phi} = r [\cosh(\phi) + u \sinh(\phi)]$$

$$r^2 = w \bar{w} = (x + uy)(x - uy) = x^2 - y^2$$

Note-se, desde já que:

$$\begin{cases} e^{u\phi} = \cosh(\phi) + u \sinh(\phi) \\ e^{-u\phi} = \cosh(\phi) - u \sinh(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = e^{u\phi} e^{-u\phi} = [\cosh(\phi) + u \sinh(\phi)][\cosh(\phi) - u \sinh(\phi)] \\ = \cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) \end{cases}$$

Teorema de Pitágoras no plano hiperbólico

↦

 $\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$.

Demonstração

Começemos por notar que, por definição, se tem $u^2 = 1$ mas com $u \notin \mathbb{R}$, i.e., deverá ser $u \neq \pm 1$.

Além disso, vem

$$u^2 = 1 \Rightarrow u^{2k} = 1^k = 1 \Rightarrow u^{2k+1} = u .$$

Logo, pelo desenvolvimento em série da exponencial, obtém-se

$$\left| \begin{aligned} \exp(u\phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u\phi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \frac{\phi^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} u^{2k} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} u^{2k+1} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + u \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} . \end{aligned} \right.$$

Mas, pelos desenvolvimentos em série das funções hiperbólicas,

$$\left[\begin{aligned} \cosh(\phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\phi^6}{6!} + \dots, \\ \sinh(\phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \phi + \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + \frac{\phi^7}{7!} + \dots, \end{aligned} \right.$$

infere-se, portanto, que

$$\exp(u\phi) = \cosh(\phi) + u \sinh(\phi) ,$$

QED.

Em relação à hipérbole da figura inicial, tem-se:

$$\sinh(\phi) = \frac{y}{r}, \quad \cosh(\phi) = \frac{x}{r}, \quad \tanh(\phi) = \frac{y}{x}.$$

Definem-se, ainda, as funções hiperbólicas:

$$\operatorname{csch}(\phi) = \frac{1}{\sinh(\phi)}, \quad \operatorname{sech}(\phi) = \frac{1}{\cosh(\phi)}, \quad \operatorname{coth}(\phi) = \frac{1}{\tanh(\phi)}.$$

Note-se, também, que se pode escrever:

$$\begin{cases} e^{u\phi} = \cosh(\phi) + u \sinh(\phi) \\ e^{-u\phi} = \cosh(\phi) - u \sinh(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{u\phi} + e^{-u\phi} = 2 \cosh(\phi) \\ e^{u\phi} - e^{-u\phi} = 2u \sinh(\phi) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\cosh(\phi) = \frac{1}{2}(e^{u\phi} + e^{-u\phi}), \quad \sinh(\phi) = \frac{u}{2}(e^{u\phi} - e^{-u\phi})}$$

pois

$$\boxed{u^{-1} = \frac{1}{u} = u}.$$

Note-se que, mais simplesmente, se pode também fazer

$$\boxed{\exp(\phi) = \cosh(\phi) + \sinh(\phi), \quad \cosh(\phi) = \frac{1}{2}(e^{\phi} + e^{-\phi}), \quad \sinh(\phi) = \frac{1}{2}(e^{\phi} - e^{-\phi})}.$$

Estas últimas expressões são, efectivamente, mais simples do ponto de vista analítico pois dispensam a utilização de números hiperbólicos. Por outro lado, deixam de admitir a interpretação geométrica que torna o plano hiperbólico numa espécie de espelho do plano euclidiano. Porém, essa interpretação geométrica requer uma *distância não-euclidiana* entre dois pontos. É essa definição não convencional (i.e., não-euclidiana) de distância que condiciona o carácter contra-intuitivo de se escrever (vir figura no início)

distância hiperbólica \mapsto $\boxed{|\overline{OP}| = r}$.

Este conceito de distância não-euclidiana tem *relevância física* em *teoria da relatividade* (nomeadamente no *espaço-tempo de Minkowski*).

Primeira Proposição fundamental – A hipérbole $x^2 - y^2 = r^2$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano hiperbólico que se encontram a uma *distância hiperbólica* constante, de valor r , da origem O . Por distância hiperbólica entende-se a distância correspondente ao teorema de Pitágoras do plano hiperbólico.

Definição formal de *números hiperbólicos*:

$$\mathbb{U} = \{ w = x + u y \mid x, y \in \mathbb{R}, u^2 = 1, u \neq \pm 1 \} .$$

No plano hiperbólico a *unidade unipotente* corresponde ao ponto $u = (0, 1)$ que está sobre o eixo Y (ver figura inicial). O conjugado de $w = x + u y$ é $\bar{w} = x - u y$ e, portanto,

$$|w|^2 = w\bar{w} = (x + u y)(x - u y) = x^2 - y^2 .$$

É claro que podemos ter uma segunda hipérbole: $y^2 - x^2 = r^2$. E, por essa razão, podemos formular uma segunda proposição fundamental. Sublinhe-se que a unidade hiperbólica $u = (0, 1)$ pertence a esta segunda família de hipérbolas com $r = 1$ (mais precisamente: u pertence ao ramo superior da hipérbole $y^2 - x^2 = 1$). É claro que, neste caso, podemos escrever $w = y + u x$, pelo que $\bar{w} = y - u x$ e, conseqüentemente,

$$|w|^2 = w\bar{w} = (y + u x)(y - u x) = y^2 - x^2 .$$

Segunda Proposição fundamental – A hipérbole $y^2 - x^2 = r^2$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano hiperbólico que se encontram a uma *distância hiperbólica* constante, de valor r , da origem O . Por distância hiperbólica entende-se a distância correspondente ao teorema de Pitágoras do plano hiperbólico.

NOTAÇÃO – Não é possível utilizar a letra \mathbb{H} para os números hiperbólicos porque esta letra está reservada para os *quaterniões de Hamilton*. Por sua vez a letra \mathbb{Q} não pode ser utilizada para os quaterniões: ela está reservada para os *números racionais*. Por essa razão adopta-se a letra \mathbb{U} para designar os números hiperbólicos (por vezes também chamados *unipodais*).

O sector hiperbólico, que se estende (na hipérbole) desde o ponto $Q \mapsto (x=1, y=0)$ até ao ponto $P \mapsto (x=r \cosh(\phi), y=r \sinh(\phi))$, corta uma superfície (definida pelos três pontos O, P, Q) cuja área total é

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \phi .$$

Veja-se, neste caso, a similitude com o caso das funções circulares (em geometria euclidiana). Note-se que, para a completa determinação do ponto P , tal que

$$P \in \mathfrak{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, |y| < |x| \},$$

é necessário considerar o ramo *direito* (ou *right*) da hipérbole $x^2 - y^2 = r^2$, em que

$$r > 0, \quad -\infty < \phi < \infty,$$

correspondente à parametrização

$$\begin{cases} x = r \cosh(\phi), \\ y = r \sinh(\phi). \end{cases}$$

Por outro lado, para a completa determinação do ponto P , tal que

$$P \in \mathfrak{L} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, |y| < |x| \},$$

é necessário considerar o ramo *esquerdo* (ou *left*) da hipérbole $x^2 - y^2 = r^2$, em que

$$r > 0, \quad -\infty < \phi < \infty,$$

correspondente à parametrização

$$\begin{cases} x = -r \cosh(\phi), \\ y = r \sinh(\phi). \end{cases}$$

Sublinhe-se, todavia, que a hipérbole $x^2 - y^2 = r^2$ só cobre *metade* do plano hiperbólico, a saber:

$$P \in \mathfrak{R} \cup \mathfrak{L}.$$

Para a outra metade tem de se ter em consideração a família de hipérbolas complementares da forma

$$\boxed{y^2 - x^2 = r^2},$$

em que, no ramo *superior* (ou *up*), se tem

$$P \in \mathfrak{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |y| > |x|\} \mapsto \begin{cases} x = r \sinh(\phi), \\ y = r \cosh(\phi), \end{cases}$$

e, no ramo *inferior* (ou *down*),

$$P \in \mathfrak{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, |y| > |x|\} \mapsto \begin{cases} x = r \sinh(\phi), \\ y = -r \cosh(\phi). \end{cases}$$

Note-se que $u = (0, 1) \in \mathfrak{U}$ com $r = 1$ e $\phi = 0$. Tanto no caso \mathfrak{U} como no caso \mathfrak{D} considera-se, sempre,

$$r > 0, \quad -\infty < \phi < \infty.$$

Se se considerar, ainda, a recta

$$\ell_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\},$$

bem como a recta

$$\ell_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\},$$

então o plano hiperbólico (completo) corresponde à região

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{U} \cup \mathfrak{D} \cup \ell_+ \cup \ell_-.$$

Demonstração

Vai-se, aqui, provar a fórmula da área relativa ao sector hiperbólico denominado por $\mathfrak{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, |y| < |x|\}$ e com a parametrização

$$\begin{cases} x = r \cosh(\phi), \\ y = r \sinh(\phi). \end{cases}$$

Trata-se, portanto, de provar que (ver figura no início):

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \phi .$$

Comecemos por notar que, da expressão da hipérbole $x^2 - y^2 = r^2$, se infere que $x = \sqrt{r^2 + y^2}$.

Então, o integral

$$I = \int_0^{r \sinh(\phi)} \sqrt{r^2 + y^2} \, dy = r \int_0^{r \sinh(\phi)} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{r}\right)^2} \, dy = \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

é, efectivamente, igual à soma da área \mathcal{A} (que se pretende determinar) com a área \mathcal{B} do triângulo:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} [r \cosh(\phi)] [r \sinh(\phi)] = \frac{1}{2} r^2 \sinh(\phi) \cosh(\phi).$$

Assim, uma vez calculado o valor do integral I , podemos calcular

$$\mathcal{A} = I - \mathcal{B} .$$

Calculemos, então, o integral I através da mudança de variável

$$u = \sinh(v) \quad \mapsto \quad du = \cosh(v) \, dv ,$$

vindo

$$I = r^2 \int_0^\phi \sqrt{1 + \sinh^2(v)} \cosh(v) \, dv = r^2 \int_0^\phi \cosh^2(v) \, dv .$$

Mas, atendendo a que

$$\cosh^2(v) = \frac{1}{2} [1 + \cosh(2v)] ,$$

obtém-se finalmente

$$I = \frac{1}{2} r^2 \phi + \frac{1}{4} r^2 \sinh(2\phi) = \frac{1}{2} r^2 \phi + \frac{1}{2} r^2 \sinh(\phi) \cosh(\phi).$$

Daqui se infere o valor de \mathcal{A} depois de subtrair o valor conhecido de \mathcal{B} .

A base *standard* de \mathbb{C} é $\mathcal{B} = \{1, i\}$. Por sua vez, a base *standard* de \mathbb{U} é $\mathcal{B} = \{1, u\}$. Assim, enquanto espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{R} , é

$$\dim(\mathbb{C}) = \dim(\mathbb{U}) = 2.$$

Existe, porém, uma base alternativa para os números hiperbólicos:

$$\mathcal{B}^* = \{u_+, u_-\},$$

em que

$$\begin{cases} u_+ = \frac{1}{2}(1+u) \\ u_- = \frac{1}{2}(1-u) \end{cases}.$$

Assim, decorre desta definição que

$$\begin{cases} u_+ + u_- = 1 \\ u_+ - u_- = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_+^2 = \frac{1}{4}(1+u)(1+u) = \frac{1}{4}(1+2u+u^2) = \frac{1}{2}(1+u) \\ u_-^2 = \frac{1}{4}(1-u)(1-u) = \frac{1}{4}(1-2u+u^2) = \frac{1}{2}(1-u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_+^2 = u_+ \\ u_-^2 = u_- \end{cases}$$

pelo que os números u_+ e u_- são *idempotentes*. Diz-se, portanto, que $\mathcal{B}^* = \{u_+, u_-\}$ é a *base idempotente*. Porém, existe um problema mais sério: estes dois números são *divisores de zero*. Com efeito,

$$u_+ u_- = \frac{1}{4}(1+u)(1-u) = \frac{1}{4}(1-u^2) \Rightarrow u_+ u_- = 0,$$

não obstante se ter $u_+ \neq 0$ e $u_- \neq 0$.

De acordo com o teorema de Frobenius, as únicas *álgebras associativas de divisão* com dimensão finita, definidas sobre o corpo \mathbb{R} dos reais, são: (i) os números reais \mathbb{R} (de dimensão 1); (ii) os números complexos \mathbb{C} (de dimensão 2); (iii) os quaterniões de Hamilton \mathbb{H} (de dimensão 4).

Com efeito, o conjunto dos números hiperbólicos *não é um anel de divisão* – e, por maioria de razão, *não é um corpo* – pois admite divisores de zero não triviais (i.e., tem divisores de zero que não são o zero do anel).

Por outro lado, mostra-se que um domínio integral é um anel comutativo não-nulo em que o único divisor de zero é o próprio zero. O *anel nulo* é aquele cujo único elemento é o zero, i.e., $\{0\}$. O anel de divisão \mathbb{H} (dos quaterniões de Hamilton) não é um anel comutativo apesar de ser um anel de divisão (por isso mesmo \mathbb{H} não é um corpo). Portanto: o conjunto dos números hiperbólicos *não é um domínio integral*.

Conclusão – O conjunto \mathbb{U} dos números hiperbólicos é um *anel comutativo unitário* que não é nem um anel de divisão nem um domínio integral.

Seja $w = x + uy \in \mathbb{U}$. Então,

$$w = x + uy = \frac{1}{2}(x+y)(1+u) + \frac{1}{2}(x-y)(1-u) \Rightarrow \boxed{w = w_+u_+ + w_-u_-},$$

desde que se introduza

$$\boxed{\begin{matrix} w_+ = x + y \\ w_- = x - y \end{matrix}}.$$

Verificam-se, assim, as seguintes *propriedades projectivas*:

$$\left[\begin{matrix} wu_+ = (w_+u_+ + w_-u_-)u_+ = w_+u_+^2 + w_-u_+u_- \\ wu_- = (w_+u_+ + w_-u_-)u_- = w_+u_+u_- + w_-u_-^2 \end{matrix} \right] \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} wu_+ = w_+u_+ \\ wu_- = w_-u_- \end{matrix}}.$$

Note-se, ainda, que

$$|w|^2 = w\bar{w} = (x+uy)(x-uy) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \Rightarrow \boxed{|w|^2 = w_+w_-}.$$

Um número hiperbólico $w \neq 0$ diz-se *isotrópico* quando $|w|=0$. O inverso de w é o número

$$\boxed{w^{-1} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{x-uy}{x^2-y^2} = \frac{u_+}{w_+} + \frac{u_-}{w_-}}$$

que existe se (e só se) w for *anisotrópico* diferente de zero, i.e., $w \neq 0$ e $x \neq y$. Note-se, com efeito, que o numerador é

$$w_-u_+ + w_+u_- = \frac{1}{2}(x-y)(1+u) + \frac{1}{2}(x+y)(1-u) = x-uy = \bar{w}$$

e o denominador é

$$w_+w_- = |w|^2 = x^2 - y^2.$$

Facilmente se calculam as potências de w . Vem sucessivamente (com $k = 1, 2, 3, \dots$)

$$w^2 = (w_+u_+ + w_-u_-)^2 = (w_+u_+ + w_-u_-)(w_+u_+ + w_-u_-) = w_+^2u_+ + w_-^2u_- ,$$

$$w^3 = (w_+^2u_+ + w_-^2u_-)(w_+u_+ + w_-u_-) = w_+^3u_+ + w_-^3u_- ,$$

...

$$\boxed{w^k = w_+^k u_+ + w_-^k u_-}.$$

Note-se que a álgebra \mathbb{U} , definida sobre o corpo \mathbb{R} , é *isomorfa* à álgebra das matrizes reais de 2×2 ou $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$, desde que se faça (com $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\mathbb{U} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{R}), \quad w = x + uy \mapsto \mathbf{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Por exemplo:

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u^2 = uu \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{U},$$

$$|w|^2 = w\bar{w} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 0 \\ 0 & x^2 - y^2 \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{U}.$$

A álgebra \mathbb{U} pode ser entendida não como um anel mas como o espaço linear (ou vectorial) \mathbb{R}^2 dos pares ordenados $w = (x, y)$ de números reais, tais que (comparar com \mathbb{C}):

$$\boxed{\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}}.$$

A primeira propriedade corresponde à soma de números hiperbólicos:

$$\begin{cases} w_1 = x_1 + u y_1 \\ w_2 = x_2 + u y_2 \end{cases} \mapsto w_1 + w_2 = (x_1 + x_2) + u (y_1 + y_2).$$

A segunda, que define o produto entre vectores da álgebra, corresponde a:

$$\begin{cases} w_1 = x_1 + u y_1 \\ w_2 = x_2 + u y_2 \end{cases} \mapsto w_1 w_2 = (x_1 + u y_1)(x_2 + u y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + u (x_1y_2 + x_2y_1).$$

Em particular, tem-se:

$$u^2 = (0, 1)^2 = uu = (0, 1)(0, 1) = (1, 0) = 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{U}.$$

A operação de *conjugação* corresponde a fazer

$$w = x + u y = (x, y) \mapsto \bar{w} = x - u y = (x, -y).$$

Tem-se

$$w\bar{w} = (x, y)(x, -y) = (x^2 - y^2, 0) = |w|^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{U}.$$

A questão da distância, no plano hiperbólico, não ser euclidiana advém da teoria matemática das *formas quadráticas*.

Consideraremos, aqui, apenas o caso das formas quadráticas definidas sobre o corpo \mathbb{R} dos reais e, mais especificamente, em espaços vectoriais V de dimensão 2:

$$\dim(V) = 2.$$

Note-se que, tanto \mathbb{C} (números complexos) como \mathbb{U} (números hiperbólicos), são isomorfos – enquanto espaços vectoriais – ao espaço vectorial \mathbb{R}^2 dos pares ordenados de números reais. O que

estabelece a diferença algébrica entre eles é a noção de *espaço quadrático*. Vejamos em que consiste este conceito.

Definição – Uma *forma quadrática* num espaço vectorial V sobre o corpo \mathbb{R} é uma aplicação $\mathcal{Q}: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a} \in V$, $\mathcal{Q}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda^2 \mathcal{Q}(\mathbf{a})$. Além disso, deve existir uma aplicação bilinear (i.e., linear em ambos os argumentos) $\mathcal{B}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V^2 \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}$, com $\mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathcal{Q}(\mathbf{a}) - \mathcal{Q}(\mathbf{b})]$. Um espaço linear V onde existe uma tal forma quadrática diz-se um *espaço quadrático*.

Uma forma quadrática obedece à chamada *regra do paralelogramo*:

$$\boxed{\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathcal{Q}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathcal{Q}(\mathbf{a}) + 2\mathcal{Q}(\mathbf{b})}.$$

Note-se que a forma bilinear $\mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é simétrica:

$$\mathcal{B}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\mathbf{b} + \mathbf{a}) - \mathcal{Q}(\mathbf{b}) - \mathcal{Q}(\mathbf{a})] = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathcal{Q}(\mathbf{a}) - \mathcal{Q}(\mathbf{b})] = \mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Além disso, vem

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(2\mathbf{a}) - 2\mathcal{Q}(\mathbf{a})] = \frac{1}{2} [4\mathcal{Q}(\mathbf{a}) - 2\mathcal{Q}(\mathbf{a})] \Rightarrow \boxed{\mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathcal{Q}(\mathbf{a})}.$$

O caso *euclidiano* corresponde a uma forma quadrática *definida positiva*, com

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Q}(\mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 \\ \mathcal{Q}(\mathbf{b}) = b_1^2 + b_2^2 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2) \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \\ \mathcal{Q}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \end{cases}$$

de forma que, com efeito, se tem

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathcal{Q}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\
 &= 2(a_1^2 + a_2^2) + 2(b_1^2 + b_2^2) \\
 &= 2\mathcal{Q}(\mathbf{a}) + 2\mathcal{Q}(\mathbf{b}).
 \end{aligned}$$

No caso euclidiano a forma bilinear é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathcal{Q}(\mathbf{a}) - \mathcal{Q}(\mathbf{b})] \\
 &= \frac{1}{2} [(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)] \\
 &= a_1 b_1 + a_2 b_2
 \end{aligned}$$

e podemos introduzir o seguinte produto interno

$$\boxed{\text{produto interno do plano euclidiano}} \mapsto \boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}.$$

Isto corresponde a considerar a seguinte *métrica euclidiana*:

$$\boxed{\text{métrica euclidiana}} \mapsto \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A forma quadrática, correspondente ao vector $\overline{\mathbf{OP}} = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, é

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q}(\mathbf{r}) = \mathcal{X}^T \mathcal{G} \mathcal{X} = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\text{forma quadrática do plano euclidiano}} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(x, y) = \mathcal{X}^T \mathcal{G} \mathcal{X} = x^2 + y^2}.$$

A circunferência de raio r é:

$$\boxed{\text{circunferência}} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(\mathbf{r}) = r^2}.$$

Por sua vez, o caso *hiperbólico* corresponde a uma forma quadrática *indefinida*, com

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Q}(\mathbf{a}) = a_1^2 - a_2^2 \\ \mathcal{Q}(\mathbf{b}) = b_1^2 - b_2^2 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 \\ \mathcal{Q}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 \end{cases}$$

de forma que, com efeito, também se tem

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathcal{Q}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) &= (a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 + (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 \\ &= 2(a_1^2 - a_2^2) + 2(b_1^2 - b_2^2) \\ &= 2\mathcal{Q}(\mathbf{a}) + 2\mathcal{Q}(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

No caso hiperbólico a forma bilinear é

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathcal{Q}(\mathbf{a}) - \mathcal{Q}(\mathbf{b})] \\ &= \frac{1}{2} [(a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 - (a_1^2 - a_2^2) - (b_1^2 - b_2^2)] \\ &= a_1 b_1 - a_2 b_2 \end{aligned}$$

e podemos introduzir o seguinte produto interno

$$\boxed{\text{produto interno do plano hiperbólico}} \mapsto \boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 - a_2 b_2}.$$

Isto corresponde a considerar a seguinte *métrica hiperbólica*:

$$\boxed{\text{métrica hiperbólica}} \mapsto \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A forma quadrática correspondente ao vector $\overline{\mathbf{OP}} = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ é

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q}(\mathbf{r}) = \mathcal{X}^T \mathcal{G} \mathcal{X} = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$$

$$\therefore \boxed{\text{forma quadrática do plano hiperbólico}} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(x, y) = \mathcal{X}^T \mathcal{G} \mathcal{X} = x^2 - y^2}.$$

$$\boxed{\text{vectores nulos}} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(\mathbf{r}) = 0} \mapsto \boxed{y = \pm x}$$

$$\boxed{\text{hipérbole do primeiro tipo}} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(\mathbf{r}) = r^2 > 0} \mapsto \boxed{x^2 - y^2 = r^2}$$

$$\boxed{\text{hipérbole do segundo tipo}} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(\mathbf{r}) = -r^2 < 0} \mapsto \boxed{y^2 - x^2 = r^2}$$

A diferença fundamental é a seguinte.

- No caso euclidiano: $\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 > 0$, para quaisquer $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1$.
- No caso hiperbólico: (i) $\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = a_1^2 - a_2^2 = 0$, para $|a_1| = |a_2|$; (ii) $\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = a_1^2 - a_2^2 > 0$, para $|a_1| > |a_2|$; (iii) $\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = a_1^2 - a_2^2 < 0$, para $|a_1| < |a_2|$. Tem-se $\mathbf{e}_1^2 = -\mathbf{e}_2^2 = 1$.

No caso euclidiano é possível, desta forma, introduzir a habitual distância ou comprimento r :

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathcal{Q}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2$$

$$\therefore |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = r.$$

Logo, neste caso, é sempre $r \geq 0$ e apenas se tem $r = 0$ quando $\mathbf{a} = 0$ (i.e., para $a_1 = a_2 = 0$). Um *vector unitário* terá sempre, no plano euclidiano, a seguinte forma:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow \mathbf{a} = \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathcal{Q}(\mathbf{a}) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

No caso hiperbólico tem de se introduzir uma nova distância ou comprimento r como segue:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathcal{Q}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 - a_2^2$$

$$\therefore |\mathbf{a}| = \sqrt{|a_1^2 - a_2^2|} = r.$$

Neste caso é (também) sempre $r \geq 0$ mas, agora, tem-se $r = 0$ se $|a_1| = |a_2|$. Isto significa que, ao representar o vector $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$ no plano XY , este vector é *nulo* ou *isotrópico* desde que seja paralelo à linha recta $y = x$ ou à linha recta $y = -x$ já que, nestes dois casos, é $\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = 0$. Os vectores seguintes são, no plano hiperbólico, nulos (para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\mathbf{a} = \lambda (\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2) \Rightarrow \mathcal{Q}(\mathbf{a}) = 0.$$

No plano hiperbólico um *vector unitário* poderá ter uma das seguintes formas:

$-\infty < \phi < \infty \Rightarrow$	$\mathbf{a} = \cosh(\phi) \mathbf{e}_1 + \sinh(\phi) \mathbf{e}_2 \Rightarrow$	$\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = \cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$
$-\infty < \phi < \infty \Rightarrow$	$\mathbf{a} = -\cosh(\phi) \mathbf{e}_1 + \sinh(\phi) \mathbf{e}_2 \Rightarrow$	$\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = \cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$
$-\infty < \phi < \infty \Rightarrow$	$\mathbf{a} = \sinh(\phi) \mathbf{e}_1 + \cosh(\phi) \mathbf{e}_2 \Rightarrow$	$\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = \sinh^2(\phi) - \cosh^2(\phi) = -1$
$-\infty < \phi < \infty \Rightarrow$	$\mathbf{a} = \sinh(\phi) \mathbf{e}_1 - \cosh(\phi) \mathbf{e}_2 \Rightarrow$	$\mathcal{Q}(\mathbf{a}) = \sinh^2(\phi) - \cosh^2(\phi) = -1$

Energia Electromagnética

Consideremos as equações de Maxwell para os rotacionais: (i) a equação de Maxwell-Faraday; (ii) a equação de Maxwell-Ampère.

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Logo, da identidade vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}),$$

infere-se que

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{-\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})}.$$

Façamos, agora,

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}.$$

Nestas condições, vem

$$\boxed{\text{forma local do teorema de Poynting}} \mapsto \boxed{-\frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + Q}$$

que é a forma diferencial do teorema de Poynting. Recorde-se, aqui, que o vector de Poynting (instantâneo) é

$$\boxed{\text{vector de Poynting (instantâneo)}} \mapsto \boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}}.$$

Introduziu-se, também,

$$\boxed{Q = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}},$$

que representa a energia dissipada (nos meios) por unidade de volume e por unidade de tempo, i.e., em $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ (unidades SI). A amplitude do vector de Poynting expressa-se em $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ e representa, assim, um fluxo de potência através de uma superfície.

Podemos, ainda, definir o valor instantâneo da *densidade volúmica de energia electromagnética*, em $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$, como sendo

$$\hat{\mathcal{E}} = \int_{-\infty}^t \frac{\partial W}{\partial t} dt = \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dt,$$

em que

$$\boxed{\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}_e + \hat{\mathcal{E}}_m} \mapsto \begin{cases} \hat{\mathcal{E}}_e = \int_{-\infty}^t \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt, \\ \hat{\mathcal{E}}_m = \int_{-\infty}^t \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt, \end{cases}$$

onde $\hat{\mathcal{E}}_e$ representa o valor instantâneo da *densidade volúmica de energia eléctrica* e $\hat{\mathcal{E}}_m$ o valor instantâneo da *densidade volúmica de energia magnética*.

Logo, integrando em volume a forma local do teorema de Poynting e aplicando o teorema da divergência, obtém-se a forma global ou integral do teorema de Poynting:

$$\boxed{\text{forma global do teorema de Poynting}} \mapsto \boxed{-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{S_V} (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) d\sigma + \int_V Q d\tau}.$$

Note-se que

$$\Delta = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_V W d\tau = \Delta_e + \Delta_m \quad \mapsto \quad \Delta_e = \int_V W_e d\tau, \quad \Delta_m = \int_V W_m d\tau,$$

tendo-se

$$W_e = \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \hat{\mathcal{E}}_e d\tau = \int_V \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_e}{\partial t} d\tau = \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\tau,$$

$$W_m = \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \hat{\mathcal{E}}_m d\tau = \int_V \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_m}{\partial t} d\tau = \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\tau.$$

A forma integral do teorema de Poynting pode escrever-se, então, na seguinte forma alternativa:

$$\boxed{-\Delta = \Sigma + P_d} \quad \mapsto \quad \boxed{\Sigma = \int_{S_V} (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) d\sigma, \quad P_d = \int_V Q d\tau}.$$

Nesta forma alternativa, Σ representa a potência que atravessa a superfície fechada S_V que é a fronteira do volume V , i.e., $S_V = \partial V$. Por outro lado, P_d representa a potência que o campo electromagnético fornece às cargas no interior do volume V e que é, portanto, dissipada no interior desse volume. Conclui-se, portanto, que Δ quantifica a diminuição de potência (e daí o sinal negativo no lado esquerdo da forma global do teorema) no volume V , de origem electromagnética, em consequência do fluxo Σ para o exterior e da dissipação P_d . Note-se que $W = W_e + W_m$ indica a densidade volúmica, em $W \cdot \text{m}^{-3}$, de diminuição Δ de potência electromagnética correspondente.

No vácuo (ou no ar), em que

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases}$$

vem, mais simplesmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 2\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 2\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 2\varepsilon_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 2\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} W_e = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau \\ W_m = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\tau \end{array}}.$$

Nestas condições, o valor instantâneo da densidade volúmica de energia electromagnética é:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \Rightarrow \boxed{\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}_e + \hat{\mathcal{E}}_m = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}.$$

Consideremos, agora, uma carga pontual de teste q animada de velocidade \mathbf{v} e imersa num campo electromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . A força de Lorentz que se exerce sobre a carga, devido ao campo, é então

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}.$$

Logo, a energia que esta carga recebe do campo é U , tendo-se

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \Rightarrow \boxed{\frac{dU}{dt} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})},$$

uma vez que $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$. Ou seja: o campo magnético não fornece energia à carga. Logo, para uma distribuição em volume de carga, com uma densidade volúmica ρ , obtém-se

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \int_V [\mathbf{E} \cdot (\rho \mathbf{v})] d\tau = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = \int_V Q d\tau.$$

Assim, com efeito, este termo dU/dt coincide com a potência dissipada P_d pelo campo electromagnético pois corresponde à potência extraída desse campo pela distribuição de carga.

As Interações Fundamentais

Existem quatro *interacções fundamentais* na natureza.

- **Gravitacional**
- **Electromagnética**
- **Nuclear forte**
- **Nuclear fraca**

Em **Propagação e Antenas** apenas se estuda a *interacção electromagnética* (entre cargas). A *interacção gravitacional* estuda a atracção universal entre partículas com massa. A *interacção nuclear forte* explica a razão pela qual os núcleos atómicos não se desintegram devido à repulsão electrostática entre prótons. A *interacção nuclear fraca* é a responsável pelo decaimento radioactivo das partículas subatómicas. Na Tabela 6 apresenta-se, esquematicamente, um resumo deste apêndice.

Actualmente, apenas a interacção gravitacional (entre massas) é descrita por uma *teoria do campo* (gravitacional) clássica – a *teoria da relatividade geral* ou GR (*general relativity*) que, no limite em que se faz $c \rightarrow \infty$, se reduz à *teoria da gravitação universal* não-relativista de Newton. As restantes três interacções são descritas por *teorias quânticas do campo* ou QFT (*quantum field theories*). Existe uma distinção básica entre uma teoria clássica do campo e uma teoria quântica do campo: o campo, na perspectiva clássica, é uma entidade *contínua* enquanto que, na perspectiva quântica, é uma entidade *discreta*. A teoria que descreve a interacção nuclear fraca é a *teoria electrofraca* ou EWT (*electroweak theory*). A teoria que descreve a interacção nuclear forte é a *cromodinâmica quântica* ou QCD (*quantum chromodynamics*). A interacção electromagnética é descrita, por sua vez, pela *electrodinâmica quântica* ou QED (*quantum electrodynamics*) que, no domínio macroscópico, se reduz à *electrodinâmica clássica* baseada nas equações de Maxwell. Uma teoria quântica reduz-se, no limite em que $\hbar \rightarrow 0$, a uma teoria clássica do campo.

Todas as teorias quânticas do campo ou QFT são *teorias quânticas relativistas* – no sentido em que conciliam a mecânica quântica com a teoria da relatividade restrita de Einstein ou SR (*special relativity*). No entanto, continua a existir um divórcio «oficial» entre a mecânica quântica relativista – na sua forma mais elaborada de QFT – e a teoria da relatividade geral de Einstein ou GR (*general*

relativity). Estamos ainda longe de poder ter uma teoria física, experimentalmente verificada, que unifique todas as quatro interacções fundamentais. Uma tal teoria física unificada – uma TOE (*theory of everything*) – não existe (se é que uma tal teoria é efectivamente possível e, um dia, venha a existir). Por exemplo: a *teoria das supercordas* (*superstring theory*) não é uma teoria física – é, apenas, uma conjectura físico-matemática.

Em cada QFT existe uma (ou mais) partícula(s) que transporta(m) a respectiva «força»: (i) o *fotão*, na interacção electromagnética; (ii) as *partículas W e Z*, na interacção nuclear fraca; (iii) o *gluão*, na interacção nuclear forte. Existe, ainda, a hipótese (não confirmada experimentalmente) de, numa teoria quântica da gravitação, existir o *gravitão*. Todas estas partículas portadoras da respectiva interacção são *bosões* – partículas de spin inteiro (que obedecem à estatística de Bose-Einstein).

Por sua vez, a matéria é composta por partículas fundamentais denominadas *fermiões* – partículas de spin semi-inteiro (que obedecem à estatística de Fermi-Dirac). Existem duas classes distintas de fermiões elementares: (i) os *quarks*, que sentem a interacção nuclear forte; (ii) os *leptões*, que não sentem a interacção nuclear forte. Os quarks não existem isoladamente – constituem partículas denominadas *hadrões*. Os hadrões existem em duas modalidades distintas: (i) os *bariões*, que são fermiões e são constituídos por três quarks; (ii) os *mesões*, que são bosões e são constituídos por um quark e um anti-quark. Os nucleões (protões e neutrões) são bariões. São exemplos de leptões os electrões e os neutrinos.

Os fermiões obedecem ao *princípio de exclusão de Pauli*: dois fermiões idênticos não podem ocupar, simultaneamente, o mesmo estado quântico. O mesmo não se aplica aos bosões: em temperaturas próximas do zero absoluto é possível que, num gás de bosões, algumas destas partículas ocupem o mesmo estado quântico. Neste caso surge um *condensado de Bose-Einstein* que permite manifestar propriedades quânticas ao nível macroscópico.

Existem três tipos de bosões elementares: (i) o bosão escalar de Higgs, com spin 0; (ii) os bosões vectoriais, com spin 1 (fotão, gluão e partículas W e Z); (iii) os bosões tensoriais de segunda ordem, com spin 2 (gravitões). Os fotões têm massa nula assim como os gravitões (caso existam) – deslocam-se sempre, por essa razão, à velocidade $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valor exacto da velocidade limite do universo, em consequência da definição de metro em 1983). A letra *c* vem da palavra latina *celeritas* que significa rapidez.

Nas páginas seguintes apresentam-se algumas figuras que resumem este quadro físico da natureza e que é conhecido por *modelo padrão* (ou *standard model*) do universo. A interpretação da interacção gravitacional (na sua faceta reconhecida de GR) em termos de uma *teoria quântica da gravitação*, mediada por bosões denominados gravitões é, de momento, pura especulação – se bem que em linha com o quadro teórico típico de uma QFT.

Fermions
matter particles

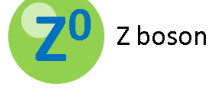
Gauge bosons
force carriers

Higgs boson
origin of mass

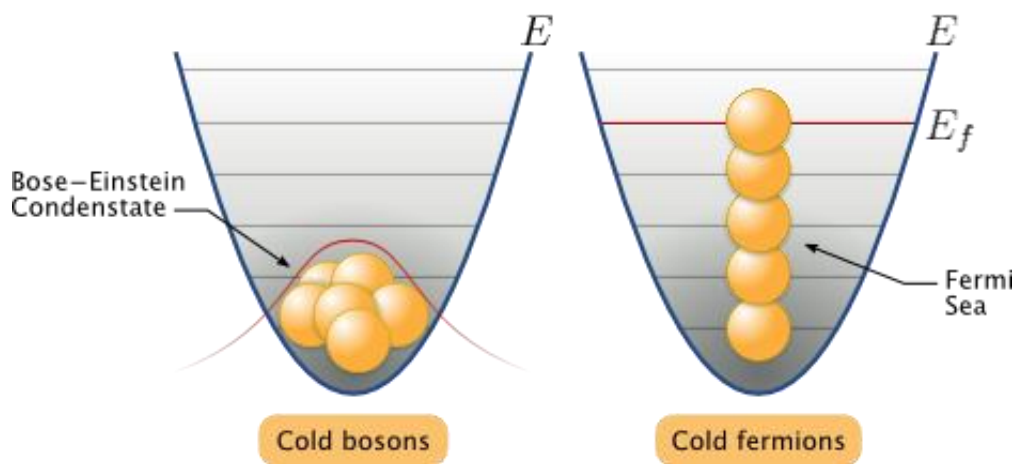
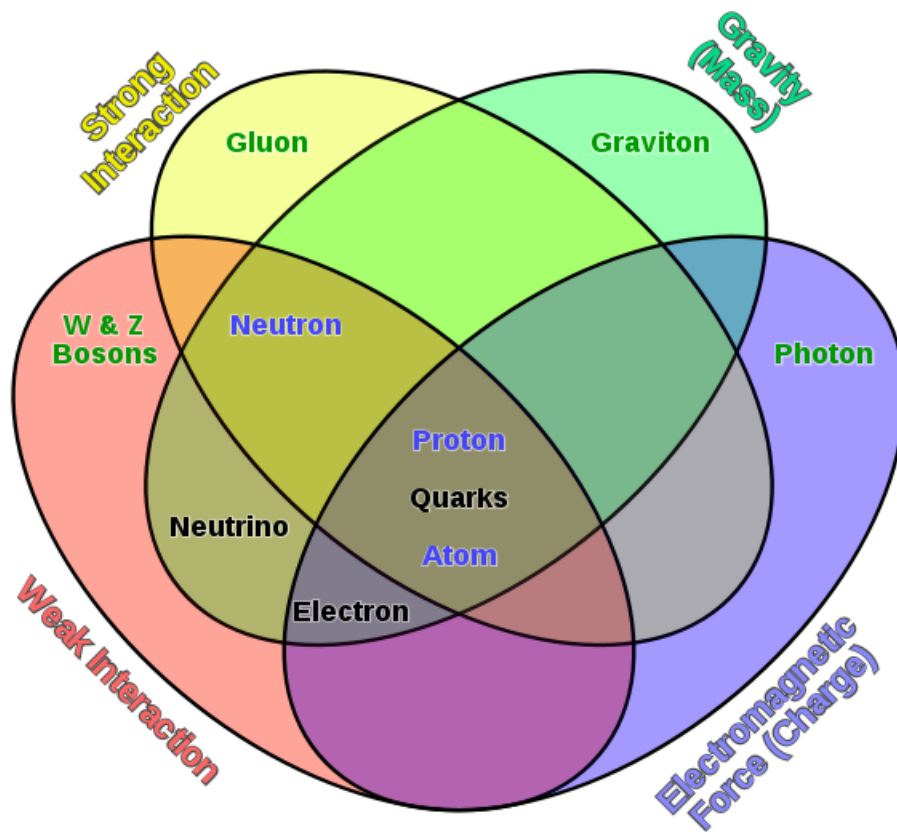
Quarks



Leptons



mass →	≈2.3 MeV/c ²	≈1.275 GeV/c ²	≈173.07 GeV/c ²	0	≈126 GeV/c ²
charge →	2/3	2/3	2/3	0	0
spin →	1/2	1/2	1/2	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H Higgs boson
QUARKS	≈4.8 MeV/c ²	≈95 MeV/c ²	≈4.18 GeV/c ²	0	
	-1/3	-1/3	-1/3	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	0.511 MeV/c ²	105.7 MeV/c ²	1.777 GeV/c ²	91.2 GeV/c ²	
	-1	-1	-1	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
LEPTONS	<2.2 eV/c ²	<0.17 MeV/c ²	<15.5 MeV/c ²	80.4 GeV/c ²	
	0	0	0	±1	
	1/2	1/2	1/2	1	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	
				GAUGE BOSONS	



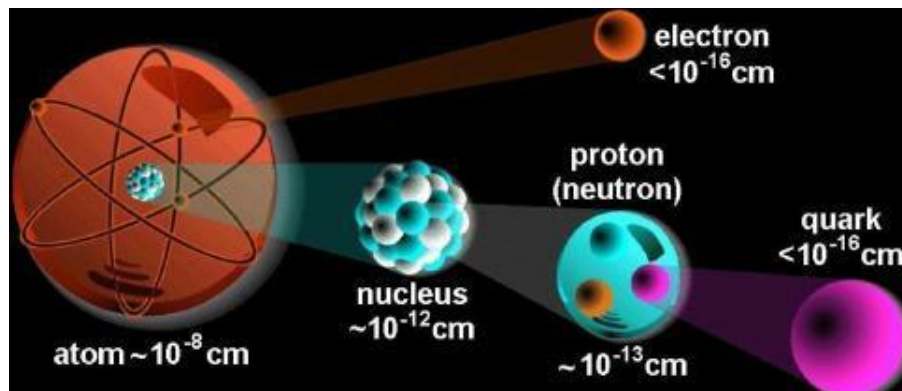
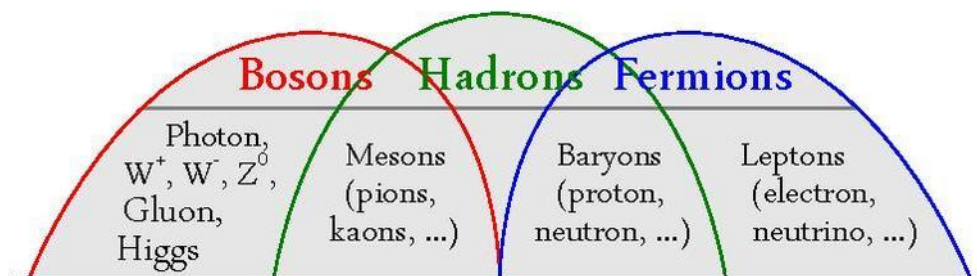


Tabela 6. As quatro interações fundamentais

Interação	Teoria física	Bosões	Força relativa	Alcance [m]
Nuclear forte	QCD	gluão	10^{38}	10^{-15}
Electromagnética	QED	fotão	10^{36}	∞
Nuclear fraca	EWT	W^+ , W^- , Z^0	10^{25}	10^{-18}
Gravitacional	GR	Gravitão (?)	1	∞

Constantes Físicas

<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/>

- Velocidade da luz no vácuo (valor exacto):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Permeabilidade magnética de vácuo (valor exacto):

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

- Permittividade eléctrica do vácuo (valor exacto):

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

- Impedância característica do vácuo (valor exacto):

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 376.730313461 \dots \Omega$$

- Constante de Planck:

$$h = 6.62606957(11) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4.135667516(91) \times 10^{-15} \text{ eV}$$

- Constante de Planck reduzida (h -traçado; em inglês: h -bar)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571726(47) \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.58211928(15) \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

- Carga elementar (i.e., valor absoluto da carga de um electrão):

$$q_0 = \sqrt{\alpha} q_p = 1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{ C}$$

- Massa do electrão:

$$m_0 = 9.10938291(40) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 = 8.18710506(36) \times 10^{-24} \text{ J} = 0.510998928(11) \text{ keV}$$

- Número de Avogadro:

$$N_A = 6.02214129(27) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

- Constante de Boltzmann:

$$k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

- Constante de Coulomb (valor exacto):

$$k_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 8.9875517873681764 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

➤ Constante de estrutura fina:

$$\alpha = \left(\frac{q_0}{q_p} \right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{q_0^2}{\hbar c} \right) = \frac{k_c q_0^2}{\hbar c} = 7.2973525698(24) \times 10^{-2}$$

$$\alpha^{-1} = 137.035999074(44)$$

➤ Massa do protão:

$$m_p = 1.672621777(74) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\mathcal{E}_p = m_p c^2 = 1.503277484(66) \times 10^{-10} \text{ J} = 938.272046(21) \text{ MeV}$$

➤ Cociente entre as massas do protão e do electrão:

$$\frac{m_p}{m_0} = 1836.15267245(75)$$

➤ Massa do neutrão:

$$m_n = 1.674927351(74) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\mathcal{E}_n = m_n c^2 = 1.505349631(66) \times 10^{-10} \text{ J} = 939.565379(21) \text{ MeV}$$

➤ Diferença de massa neutrão-protão:

$$m_n - m_p = 2.30557392(76) \times 10^{-30} \text{ kg}$$

➤ Constante de gravitação universal de Newton:

$$G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

➤ Comprimento de Planck:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616199(97) \times 10^{-35} \text{ m}$$

➤ Massa de Planck:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.17651(13) \times 10^{-8} \text{ kg}$$

➤ Tempo de Planck:

$$t_P = \frac{\ell_P}{c} = \frac{\hbar}{m_P c^2} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39106(32) \times 10^{-44} \text{ s}$$

➤ Carga de Planck:

$$q_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{k_C}} = \sqrt{4\pi \varepsilon_0 \hbar c} = 1.875545956(41) \times 10^{-18} \text{ C}$$

➤ Temperatura de Planck:

$$T_P = \frac{m_P c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = 1.416833(85) \times 10^{32} \text{ K}$$

NOTA – É habitual, na apresentação das constantes físicas, utilizar uma notação concisa. Foi o que, também aqui, se fez. Para explicar esta convenção vai-se utilizar um exemplo. O inverso da constante de estrutura fina é dado por $\alpha^{-1} = 137.035999074(44)$. Isto significa que se tem: $\alpha^{-1} = 137.035999074 \pm 0.000000044$. Ou seja: o número indicado entre parêntesis corresponde ao valor numérico do desvio padrão referente aos últimos dígitos do resultado apresentado. Portanto, no caso em análise, tem-se $137.0359990300000 \leq \alpha^{-1} \leq 137.0359991180000$. Ou seja, o resultado contendo apenas os dígitos não afectados pela incerteza é o seguinte: $\alpha^{-1} = 137.035999$.

➤ Raio da Terra:

$$6\,353\text{ km} \leq R_{\oplus} \leq 6\,384\text{ km}, \quad \langle R_{\oplus} \rangle = 6\,371\text{ km}$$

Note-se que, de acordo com uma antiga definição de **metro**, tinha-se:

$$1\text{ m} = 10^{-7} \times \frac{1}{4} \times (2\pi R_{\oplus}) \Rightarrow R_{\oplus} = \frac{2}{\pi} \times 10^4\text{ km} \approx 6\,366\text{ km}.$$

➤ Unidade astronómica (valor exacto) – aproximadamente, a distância da Terra ao Sol:

$$ua = 149\,597\,870\,700\text{ m}$$

➤ Idade do universo (estimativa):

$$\tau = (13.798 \pm 0.037) \times 10^9\text{ anos} = (4.354 \pm 0.012) \times 10^{17}\text{ s}$$

$$1\text{ ano} = 365.25\text{ dias} = 8766\text{ h} = 525\,960\text{ min} = 31\,557\,600\text{ s}$$

➤ Índice de refração do ar «standard» (ar seco a 15°C, 101 325 Pa, com 450 ppm de CO₂):

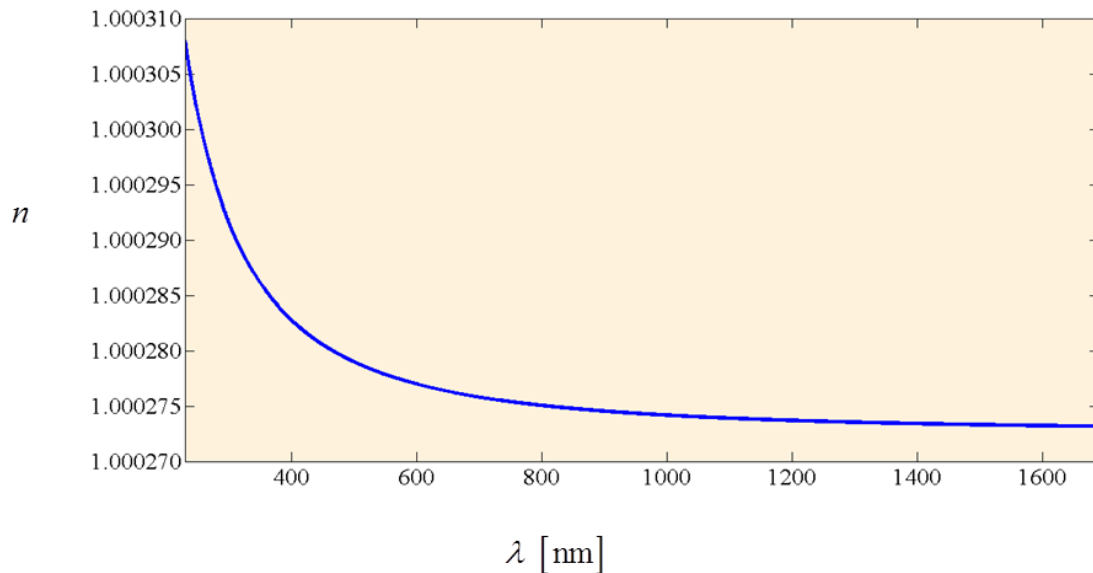
$$n = 1 + \frac{5792105 \times 10^{-8}}{238.0185 - \lambda^{-2}} + \frac{167917 \times 10^{-8}}{57.362 - \lambda^{-2}}, \quad 0.23\ \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1.69\ \mu\text{m}$$

Exemplo: Para $\lambda = 0.5876 \mu\text{m}$, vem $n = 1.000\ 277\ 17$.

<http://refractiveindex.info/>

Na figura anexa apresenta-se, com base nesta fórmula, o índice de refração do ar «standard» no intervalo de 230 nm a 1690 nm. Recorde-se, aqui, que o espectro electromagnético visível se estende de (cerca de) 380 nm (violeta) até (cerca de) 750 nm (vermelho).

Índice de refração do ar $230 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1690 \text{ nm}$

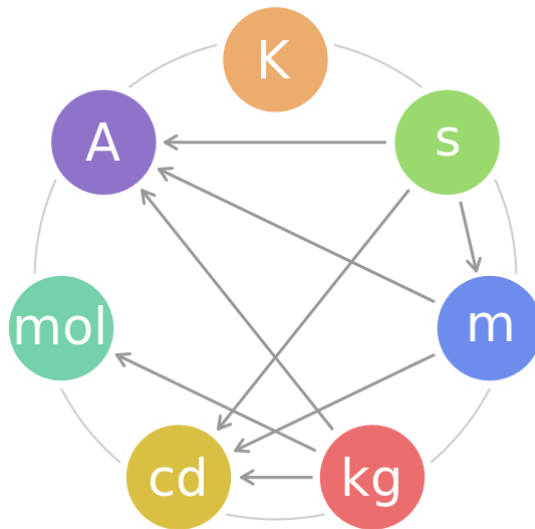


Unidades SI

Adopta-se o *Sistema Internacional de Unidades* (acrónimo: SI) – do francês: *Système International d'Unités*. Este sistema tem sete unidades básicas ou fundamentais – ver Tabela 1 da página 3; ver, ainda, o diagrama anexo da página seguinte.

Em electromagnetismo usam-se, ainda, algumas grandezas derivadas – tabela anexa.

Grandeza	Unidade	Símbolo	Dimensional analítica	Dimensional sintética
Ângulo plano	radiano	rad	1	$m \cdot m^{-1}$
Ângulo sólido	esterradiano	sr	1	$m^2 \cdot m^{-2}$
Capacitância	farad	F	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$	$C \cdot V^{-1}$
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$	$A \cdot s$
Condutância	siemens	S	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3 \cdot A^2$	$A \cdot V^{-1}$
Energia	joule	J	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	$N \cdot m$
Fluxo luminoso	lúmen	lm	cd	$cd \cdot sr$
Fluxo magnético	weber	Wb	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$V \cdot s$
Força	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Frequência	hertz	Hz	s^{-1}	s^{-1}
Indutância	henry	H	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	$Wb \cdot A^{-1}$
Excitação magnética	tesla	T	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$Wb \cdot m^{-2}$
Luminosidade	lux	lx	$cd \cdot m^{-2}$	$lm \cdot m^{-2}$
Potência	watt	W	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$	$J \cdot s^{-1}$
Pressão	pascal	Pa	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$	$N \cdot m^{-2}$
Resistência eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	$V \cdot A^{-1}$
Temperatura em Celsius	grau Celsius	$^{\circ}C$	K	K
Tensão eléctrica	volt	V	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	$W \cdot A^{-1}$

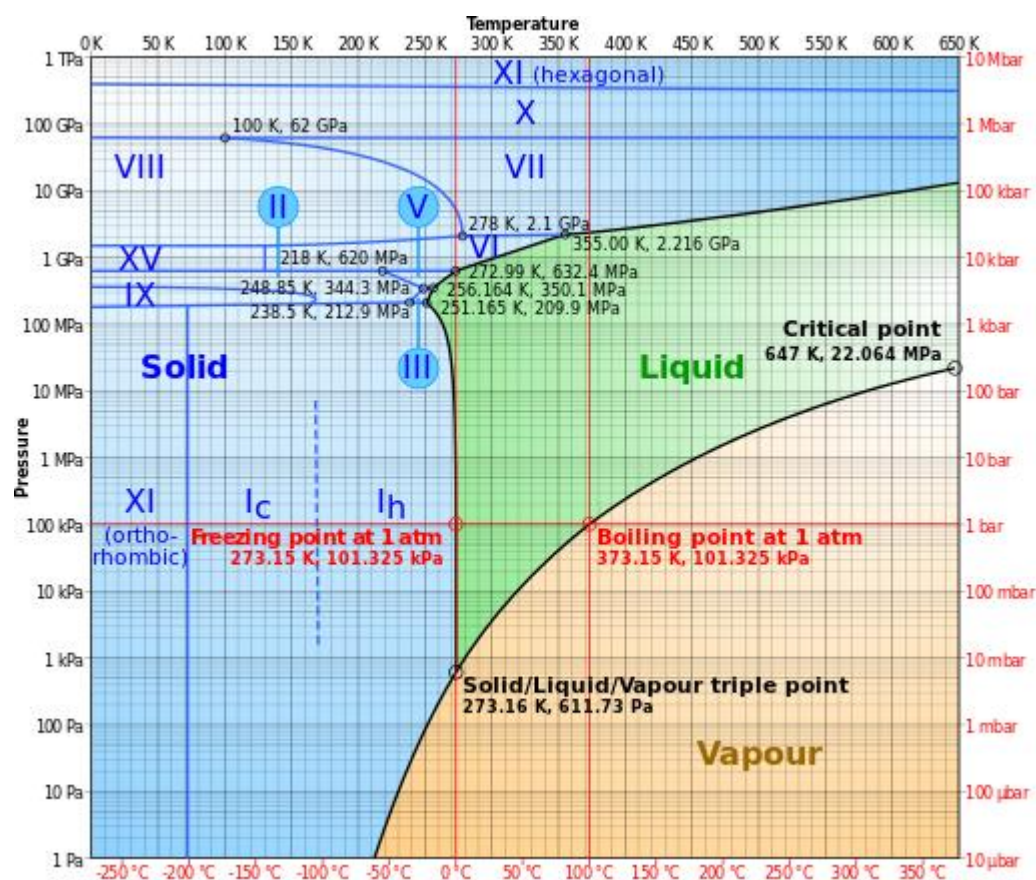


Definições

Metro	Distância percorrida pela luz, no vácuo, numa fracção $1 / 299\,792\,458$ do segundo
Quilograma	Massa do protótipo internacional do quilograma
Segundo	Duração de $9\,192\,631\,770$ períodos de radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133
Ampere	A intensidade (constante) de corrente eléctrica que, quando flui em dois condutores rectilíneos (de secção transversal negligenciável) e paralelos, colocados à distância de 1 m no vácuo, produz uma força – entre esses dois condutores – de $2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
Kelvin	A fracção $1 / 273.16$ da temperatura termodinâmica do <i>ponto triplo</i> da água
Mole	A quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares como o número de átomos de 0.012 kg de carbono 12
Candela	A intensidade luminosa produzida, numa dada direcção, por uma fonte de radiação monocromática de frequência $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ e que, nessa direcção, emite uma potência de $1 / 683 \text{ W}$ por esterradiano

NOTA – O número de Avogadro, $N_A = 6.02214129(27) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, é o número de partículas (e.g., átomos ou moléculas) que constituem uma mole de uma certa substância; 12 g de carbono 12 têm 6.022×10^{23} átomos.

NOTA – Em termodinâmica, o *ponto triplo* de uma substância é a temperatura e a pressão em que os três estados (sólido, líquido e gasoso) dessa substância coexistem em equilíbrio termodinâmico. No ponto triplo, a temperatura da água é exactamente 273.16 K (i.e., 0.01 °C) e a pressão 611.73 Pa . A partir deste ponto é possível tornar a água em gelo, água ou vapor introduzindo pequenas variações na temperatura e pressão (ver a figura anexa contendo um diagrama de fases da água).



Prefixos SI

Factor	Nome	Símbolo	Factor	Nome	Símbolo
10^{24}	iota	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zeta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	fento	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	ato	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deca	da	10^{-24}	iocto	y

Αα...Ωω

Alfabeto grego

A α	<u>Alfa</u>	N ν	<u>Nu</u>
B β	<u>Beta</u>	Ξ ξ	<u>Csi</u>
Γ γ	<u>Gama</u>	Ο ο	<u>Ómicron</u>
Δ δ	<u>Delta</u>	Π π	<u>Pi</u>
Ε ε	<u>Épsilon</u>	Ρ ρ	<u>Rô</u>
Ζ ζ	<u>Zeta</u>	Σ σ ς	<u>Sigma</u>
Η η	<u>Eta</u>	Τ τ	<u>Tau</u>
Θ θ	<u>Teta</u>	Υ υ	<u>Úpsilon</u>
Ι ι	<u>Iota</u>	Φ φ ϕ	<u>Fi</u>
Κ κ	<u>Capa</u>	Χ χ	<u>Qui</u>
Λ λ	<u>Lambda</u>	Ψ ψ	<u>Psi</u>
Μ μ	<u>Mu</u>	Ω ω	<u>Ômega</u>

Bibliografia

Sobre electromagnetismo (nível básico)

- ▣ Edward M. Purcell and David J. Morin, *Electricity and Magnetism, Third Edition*. New York, NY: Cambridge University Press, 2013.
- ▣ David K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics, Second Edition*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- ▣ Alfredo Barbosa Henriques e Jorge Crispim Romão, *Electromagnetismo*. Lisboa: IST Press, 2006.
- ▣ John D. Kraus and Daniel A. Fleisch, *Electromagnetics – With Applications, Fifth Edition*. Singapore: McGraw-Hill, 1999.
- ▣ Jin Au Kong, *Maxwell Equations*. Cambridge, MA: EMW Publishing, 2002.
- ▣ Daniel Fleisch, *A Student's Guide to Maxwell's Equations*. New York, NY: Cambridge University Press, 2008.

Sobre física geral (nível básico)

- ▣ Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics – The NEW MILLENIUM Edition*. New York, NY: Basic Books, 2010 (Vols. I – III).

Sobre electromagnetismo (nível intermédio)

- ▣ David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics, Fourth Edition*. Essex, UK: Pearson, 2014.
- ▣ Jin Au Kong, *Electromagnetic Wave Theory*. Cambridge, MA: EMW Publishing, 2005.
- ▣ Hollis C. Chen, *Theory of Electromagnetic Waves – A Coordinate-Free Approach*. Singapore: McGraw-Hill, 1985.
- ▣ Constantine A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics, Second Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2012.
- ▣ Paul Lorrain, Dale Corson, e François Lorrain, *Campos e Ondas Electromagnéticas*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

- ▣ Melvin Schwartz, *Principles of Electrodynamics*. New York: Dover, 1987 (1972).
 - ▣ Harald J. W. Müller-Kirsten, *Electrodynamics: An Introduction Including Quantum Effects*. Singapore: World Scientific, 2004.
 - ▣ Ismo V. Lindell, *Methods for Electromagnetic Field Analysis*. New York: IEEE Press, 1992.
 - ▣ Charles Herach Papas, *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*. New York: Dover: 1988 (1965).
 - ▣ Robert S. Elliott, *Electromagnetics – History, Theory, and Applications*. New York, NY: IEEE Press, 1993.
 - ▣ Wolfgang K. H. Panofsky and Melba Philips, *Classical Electricity and Magnetism, Second Edition*. Mineola, NY: Dover, 2005 (1962).
 - ▣ Albert Shadowitz, *The Electromagnetic Field*. New York: Dover, 1988 (1975).
-

Sobre electromagnetismo (nível avançado)

- ▣ Friedrich W. Hehl and Yuri N. Obukhov, *Foundations of Classical Electrodynamics – Charge, Flux, and Metric*. Boston: Birkhäuser, 2003.
 - ▣ John David Jackson, *Classical Electrodynamics, Third Edition*. New York: Wiley, 1999.
 - ▣ Florian Scheck, *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*. Berlin: Springer, 2012.
-

Sobre antenas

- ▣ Constantine A. Balanis, *Antenna Theory – Analysis and Design, Third Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2005.
 - ▣ Warren L. Stutzman and Gary A. Thiele, *Antenna Theory and Design, Third Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2013.
 - ▣ John L. Volakis, Editor, *Antenna Engineering Handbook, Fourth Edition*. New York: McGraw-Hill, 2007.
-

Sobre tópicos específicos de física e engenharia

- ▣ Robert E. Collin, *Field Theory of Guided Waves, Second Edition*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1991.
 - ▣ Robert E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering, Second Edition*. Singapore: McGraw-Hill, 1992.
 - ▣ Bahaa E. A. Saleh and Malvin Carl Teich, *Fundamentals of Photonics, Second Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2007.
 - ▣ Safa O. Kasap, *Optoelectronics and Photonics: Principles and Practices, Second Edition*. Essex: Pearson, 2013.
 - ▣ Amnon Yariv and Pochi Yeh, *Photonics – Optical Electronics in Modern Communications, Sixth Edition*. New York: Oxford University Press, 2007.
 - ▣ Govind P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems, Fourth Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2010.
 - ▣ Christopher C. Gerry and Peter L. Knight, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
 - ▣ Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy, *Quantum Optics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997.
 - ▣ Ulf Leonhardt and Thomas Philbin, *The Geometry of Light – The Science of Invisibility*. Mineola, NY: Dover, 2010.
 - ▣ Ulf Leonhardt, *Essential Quantum Optics – From Quantum Measurements to Black Holes*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.
 - ▣ Grant R. Fowles, *Introduction to Modern Optics, Second Edition*. New York: Dover, 1989 (1975).
 - ▣ N. David Mermin, *Quantum Computer Science – An Introduction*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007.
 - ▣ Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information, 10th Anniversary Edition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.
 - ▣ Frank Close, *The New Cosmic Onion: Quarks and the Nature of the Universe*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis, 2007.
-

Sobre métodos matemáticos

- ▣ I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products, Seventh Edition* (Edited by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger). Burlington, MA: Academic Press/Elsevier, 2007.
- ▣ K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering, Third Edition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.
- ▣ Sadri Hassani, *Mathematical Physics – A Modern Introduction to Its Foundations, Second Edition*. New York, NY: Springer, 2013.
- ▣ George B. Arfken, Hans J. Weber, and Frank E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists – A Comprehensive Guide, Seventh Edition*. San Diego, CA: Academic Press/Elsevier, 2013.
- ▣ Charles Chapman Pugh, *Real Mathematical Analysis*. New York: Springer, 2002.
- ▣ Harold M. Edwards, *Advanced Calculus: A Differential Forms Approach*. Boston: Birkhäuser, 1994.
- ▣ David M. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis, Second Edition*. Washington, DC: MAA, 2007.
- ▣ David M. Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*. New York: Cambridge University Press / MAA, 2008.
- ▣ Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- ▣ Mark J. Ablowitz and Athanassios S. Fokas, *Complex Variables – Introduction and Applications, Second Edition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003.
- ▣ Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right, Second Edition*. New York: Springer, 1997.
- ▣ Alan F. Beardon, *Algebra and Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- ▣ Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors, Second Edition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
- ▣ Rui Loja Fernandes e Manuel Ricou, *Introdução à Álgebra*. Lisboa: IST Press, 2004.
- ▣ Saunders Mac Lane and Garrett Birkhoff, *Algebra, Third Edition*. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 1999.
- ▣ David Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 1990.
- ▣ Harold S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry, Second Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 1989 (1969).
- ▣ Michèle Audin, *Geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- ▣ Keith Kendig, *Conics*. Washington, DC: MAA, 2005.
- ▣ Jean Dieudonné, *Mathematics – The Music of Reason*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

- ▣ Saunders Mac Lane, *Mathematics – Form and Function*. New York: Springer-Verlag, 1986.
 - ▣ Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK, Fifth Edition*. Berlin: Springer-Verlag, 2014.
 - ▣ Sir Roger Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. London, UK: Vintage, 2005.
 - ▣ John Stillwell, *Mathematics and Its History, Third Edition*. New York: Springer, 2010.
 - ▣ John Stilwell, *Roads to Infinity: The Mathematics of Truth and Proof*. Natick, MA: A K Peters, 2010.
 - ▣ Richard Courant and Herbert Robbins (Revised by Ian Stewart), *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods, Second Edition*. New York, NY: Oxford University Press, 1996.
 - ▣ F. William Lawvere and Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics – A First Introduction to Categories, Second Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
 - ▣ Timothy Gowers, Editor, *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008.
-

Sobre linguagens de programação

- ▣ Roozbeh Hazrat, *Mathematica®: A Problem-Centered Approach*. London: Springer, 2010.
- ▣ Paul Wellin, *Programming with Mathematica®: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- ▣ Brian R. Hunt, Ronald L. Lipsman, and Jonathan M. Rosenberg, *A Guide to MATLAB®: For Beginners and Experienced Users, Third Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- ▣ Stephen J. Chapman, *MATLAB® Programming for Engineers, Fifth International Edition*. Nelson Engineering, 2015.

Índice

1.	Equações de Maxwell	1
2.	Ondas planas e monocromáticas	31
3.	Velocidade de fase e velocidade de grupo	60
4.	Um condensador... não é um condensador!	66
5.	Vector de Poynting e vector de Poynting complexo	74
6.	Da óptica geométrica à óptica quântica	77
7.	Vectores	84
8.	Gradiente, divergência e rotacional	101
9.	Teoremas integrais	113
10.	Equações de Maxwell-Boffi	118
11.	Identidades vectoriais	123
12.	Coordenadas cilíndricas	124
13.	Coordenadas esféricas	126
14.	Funções circulares e números complexos	128
15.	Funções hiperbólicas e números hiperbólicos	136
16.	Energia electromagnética	152
17.	As interacções fundamentais	156
18.	Constantes físicas	161
19.	Unidades SI	167
20.	Prefixos SI	170
21.	Alfabeto grego	171
22.	Bibliografia	172
23.	Índice	177